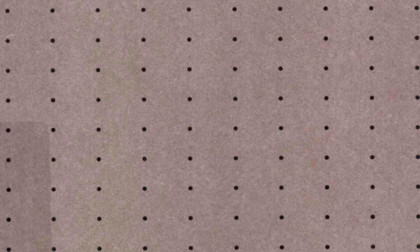
现代数学基础

15

有限群表示论

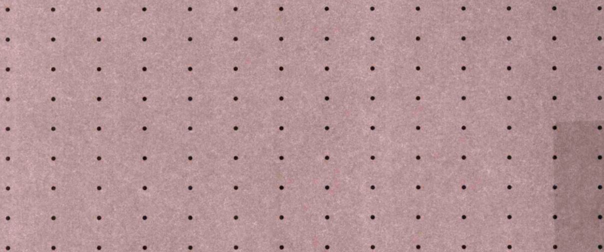
（第二版）

■ 曹锡华　时俭益





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



academic.hep.com.cn

定价 58.00 元

■ 学科类别：数学

现代数学基础

本教材获华东师范大学研究生重点教材建设基金资助

15

有限群表示论

（第二版）



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书旨在介绍有限群的表示理论，其中包括群表示论的基本概念与两条主要研究途径的介绍。书的前八章介绍有限群的常表示理论（即在特征数不整除群的阶数的域上的表示，具有完全可约性），着重论述了与群的诱导表示有关的一些经典结果，同时也探讨了域的选取与群表示分解之间的关系。后四章介绍有限群模表示的 Brauer 理论（即在特征数整除群的阶数的域上的表示，一般不具备完全可约性），该理论通过 p 模系统将有限群 G 在特征零域上的表示理论与特征 p（这里 $p||G|$）域上的表示理论联系起来；也将 G 在特征零域上的特征标理论与 G 的 p 局部结构联系起来。本书为求自成系统，在第一章用较大篇幅简要地叙述了与群表示论有关的一些预备知识，特别是介绍了有限维代数的结构与表示理论。本书每节后都附有足够多的习题帮助读者理解与拓广正文的内容。

本书假定读者已经熟悉线性代数理论，并具备群论，环论与域的伽罗华理论方面的最基本知识。本书可作为研究生与高年级本科生的教科书，也可供有关专业的数学工作者与高校教师阅读。

图书在版编目（CIP）数据

有限群表示论/曹锡华，时俭益. —2版. —北京：高等教育出版社，2009.10

ISBN 978-7-04-027486-8

Ⅰ.有… Ⅱ.①曹…②时… Ⅲ.有限群-群表示 Ⅳ.O152.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第140587号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　次	1992年10月第1版
开　本	787×1092　1/16		2009年10月第2版
印　张	20.5	印　次	2009年10月第1次印刷
字　数	390 000	定　价	58.00元

物料号　27486-00

再版前言

本书自 1992 年由高等教育出版社出版至今已有十七年, 期间曾被多个高校用作研究生课程教材, 国内也陆续出版过数本中文版的介绍群表示理论的教材。在过去的十多年里, 群表示及相关数学理论在国际上的发展日新月异, 国内学习和研究群表示理论的队伍快速壮大, 人们对于介绍群表示理论的教材也有了更高的要求和期盼。为此, 利用本书再版的机会, 作者除了对原版进行细致的勘误补正外, 在书的正文和习题部分都作了较大幅度的增补, 特别, 书中增添了介绍有限群模表示理论的四章内容, 其中包括 p 模系统 (K, R, k) 与 Grothendieck 环; Brauer 特征标、块及其亏群; Brauer 关于诱导块的三个主要定理; 顶点和源头。正文后面所附的习题, 有的直接摘自文献, 有的由文献里的一些结果编制而成, 它们将作为正文内容的有机补充, 其中有些习题内容甚至可作为正文的一部分。例如, 我们先在正文里证明了定理 (7.2.1), 接着, 在 §7.3 后设计的一组习题里让读者将定理 (7.2.1) 推广为 Witt-Berman 定理。随后, 在对定理 (9.2.6) 的证明里用到了 Witt-Berman 定理。读者可通过做习题来检验自己对正文内容的理解程度, 对新知识的自学能力和动手解题的技巧。对于书后的 "汉英对照术语索引"、"符号" 和 "参考文献", 再版本也作了相应的改变: 除了增加必要的条目外, 还细化了索引, 例如, 对于循环群、对称群、交代群、交换群等条目, 我们都列出书中多个相关出处, 循着该线索, 读者可对这些概念有比较系统的理解。又例如, 对于符号 $\mathrm{ind}_H(x)$, 原版本里仅解释为 "群的元素 x 关于子群 H 的指数", 再版本里说得更明白:"群的元素 x 关于子群 H 的指数 $[H : {}^xH \bigcap H]$"。

曾锡华教授是我在硕士研究生阶段的导师, 学习有限群表示理论的领路人, 曾亲自为我所在的 78 届研究生讲授 Serre 编写的教科书 "Linear Representations

of Finite Groups”, 曹先生的课, 深入浅出, 厚积薄发, 被文化大革命蹉跎十多年青春岁月的我们如久旱之苗如饥似渴地汲取知识的甘霖, 至今仍印象深刻, 经久不忘。曹先生于 20 世纪 80 年代中期接受编写“有限群表示论”教科书的任务, 其时正值我刚从英国获得博士学位后回国不久。他让我一起参加教科书的编写工作, 也让我主讲群表示论课程及参与他名下研究生的论文指导工作。从 1986 年春列出提纲到 1988 年春依审稿人意见修改后定稿, 前后历时约两年, 工作模式基本上是由我在曹先生的指导和放手鼓励下拟出初稿, 交曹先生校阅后提出修改意见, 再由我动手改定。授课和编写教科书的经历给我提供了极佳机会去深入系统地领略、欣赏和掌握群表示理论的精致内涵和高超技巧, 曹先生的指导和放手使我在学术上得到很好的锻炼。书在定稿后过了四年半时间才正式出版。曹先生曾于 1948 年至 1950 年期间在美国的密歇根大学师从有限群模表示理论的创始人 R.Brauer 教授, 研究群论及其表示理论。曹先生是国内研究群表示理论的德高望重的前辈, 为中国的代数学发展及相关人才建设殚尽竭虑数十载, 桃李遍天下, 享誉海内外。曹先生于 2005 年 12 月 22 日不幸因病逝世, 享年 85 岁。痛失恩师, 无以相报, 惟有继承曹先生的未竟事业, 使研究群表示理论的薪火代代相传发扬光大, 以告慰曹先生的在天之灵。这是本书在面世十七年后决定增补再版的缘起。

时俭益

2009 年 3 月 31 日

前　言

群表示理论是近代数学中发展迅速且相当活跃的数学分支，它包括群的常表示理论，模表示理论与整表示理论，其中，有限群的常表示理论创立最早，迄今已有一百多年的历史，发展也最完善，是研究其它群的表示理论的基础。

群表示理论是在线性代数、群论、环论、域的伽罗华理论、代数结构理论、模论与代数数论等数学学科的基础上发展起来的。随之群表示理论又与更多的数学学科发生了互相联系，它与范畴论，代数 K 理论，代数几何等学科的关系日趋密切，且从这些学科中不断汲取新的方法并充实新的内容。同时它也被广泛地应用于其它学科，一些较早期的如 Burnside 的群可解性等问题与较新的如有限单群分类等问题的解决都得力于群的表示理论。除此以外，群表示理论在物理、化学、天文学与建筑学等一些自然科学与科技领域里也有广泛的应用。

有限群的常表示理论是群在特征数不整除群的阶数的域上的表示理论。创立该理论的最初工作主要是由 G.Frobenius 做的，他的理论建立在复数域上，其主要工具是由他创立的群特征标理论。与 Frobenius 差不多同时的 H.Maschke 与 I.Schur 在群表示的分解与可约性问题上作出了重要贡献。特别是 Schur，经他整理的有限群表示理论简明系统而为较多人所理解，第一个把群与代数的表示理论推广到一般域上的是 E. Noether，她的名著 “Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie” 把群与代数的结构理论与表示理论融为一体。该书对于近世代数的发展产生了深远的影响，在近半个世纪来对群表示理论的各个方面都作出重大贡献的莫过于 R. Brauer，他在诱导特征标与分裂域方面的重要结果已成为群表示理论中最基本的内容之一。Brauer 的最主要贡献是创立了群的模表示理论，即群在特征数可整除群的阶数的域上的表示理论。

本书将只介绍有限群的常表示理论, 我们假定读者已经熟悉线性代数理论, 并具备群论、环论与域的伽罗华理论方面的最基本知识, 尽管如此, 为了便于学习, 我们仍在第一章简要地介绍与群表示论有关的群论、域的伽罗华理论与范畴论的基本内容, 并比较详尽地讨论有限维代数的结构与表示理论, 然后从第二章起系统地讨论有限群表示理论。第二、三、四章是关于有限群表示理论的最一般内容, 其中包括群表示论的基本概念及研究群表示论两条主要途径的介绍, 即有限维代数结构理论和群特征标理论在群表示论上的应用, 第五、六、七章着重研究群的诱导表示, 其中包括 Mackey 的子群定理与张量积定理, Frobenius 关于限制与诱导表示的互反律, 诱导表示的不可约性判则, 诱导表示及其特征标的分解以及关于诱导特征标的 Artin 定理与 Brauer 定理。最后, 第八章专门讨论表示在域上的 Schur 指标。

本书叙述力求简明通俗、自成系统。正文中的例子与每节正文后面的习题可帮助读者理解和拓广正文的内容。

本书可作为高年级大学生与研究生的教科书, 也可供有关专业的数学工作者与大学教师阅读。

对于高年级大学生, 我们不要求他们预先学过伽罗华理论。同时, 以下一些章节的内容可不列入课程范围: §1.2, §1.10, §2.5, §3.2, §4.3, §4.5, §5.5, §6.2 与第八章。此外, §5.1 中关于诱导表示的范畴论刻画的那部分内容也可略去不讲。

1987 年 12 月 9 日

目　　录

第一章　群表示论的预备知识

在本书里，假定读者已经熟悉关于群论、环论、环上模论、域的伽罗华理论与线性代数理论的基本概念. 尽管如此, 为了便于讨论群表示理论, 也为了使读者了解群表示理论所赖以发展的代数基础, 本书仍以一章的篇幅介绍与之有关的知识.

§1.1　群论的基本概念

假定读者已熟悉群的基本理论, 现在介绍本书中要用到的一些群论基本概念, 如不特别申明, 本书所考虑的群都是有限群.

(I) 若干特殊群

(1.1.1) 定义　如群 $G \neq 1$ 仅有的正规子群是 G 与 $\{1\}$, 则称 G 为**单群**.

如果

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{s+1} = \{1\}$$

是群 G 的一个子群序列使 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant s$, 有 $G_{i+1} \lhd G_i$, 这里记号 $G_{i+1} \lhd G_i$ 表明 G_{i+1} 是 G_i 的正规子群, 则称该子群列为 G 的长度等于 s 的**正规列**, 并称 $\{G_i/G_{i+1} | 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 为该正规列的**因子集**. 当因子集由单群组成时, 称该正规列为 G 的**合成列**. 合成列的因子称为**合成因子**. 据 Jordan-Hölder 定理, 群 G 的合成列的**合成因子多重集** (多重集是指带有正整数重数的元素集合. 特别, 当其所有元素的重数都等于 1 时, 多重集就是普通的集合) 在同构的意义下与 G 的合成列的选取无关, 仅与 G 本身有关, 故可称之为 G 的**合成因子多重集**.

(1.1.2) 例

(a) **导群列**　群 G 的**导群** $G^{(1)}$ 是 G 的由换位子集合 $\{a^{-1}b^{-1}ab|a,b\in G\}$ 所生成的子群, $G^{(1)}$ 也是 G 的使 G/K 为阿贝尔群的最小正规子群 K. 定义子群列

$$G=G^{(0)}\supseteq G^{(1)}\supseteq G^{(2)}\supseteq\cdots,$$

这里 $G^{(i)}$ 是 $G^{(i-1)}$ 的导群, $\forall i$, 称该子群列为 G 的**导群列**.

(b) **下中心列**　定义群 G 的子群列

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots,$$

其中 G_i 是由换位子集合 $\{a^{-1}b^{-1}ab|a\in G_{i-1},b\in G\}$ 所生成的子群, $\forall i$, 称该子群列为 G 的**下中心列**.

(c) **上中心列**　定义群 G 的子群列

$$\{1\}=Z_0\subseteq Z_1\subseteq Z_2\subseteq\cdots,$$

其中 Z_1 是 G 的中心. Z_i 是 G 的含 Z_{i-1} 的子群且 Z_i/Z_{i-1} 是 G/Z_{i-1} 的中心, $\forall i$, 称该子群列为 G 的**上中心列**.

(1.1.3) 定义　如群 G 的导群列终止于 $\{1\}$, 则称 G 为**可解群**. 如群 G 的上中心列终止于 G (或等价地, 下中心列终止于 $\{1\}$), 则称 G 为**幂零群**.

熟知群 G 可解当且仅当 G 有正规子群列

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_{s+1}=\{1\}\ (\text{即}\quad G_i\lhd G,\forall i),$$

使 $[G_i:G_{i+1}]:=\dfrac{|G_i|}{|G_{i+1}|}$ 是素数幂, $\forall i, 1\leqslant i\leqslant s$ ($|G|$ 表示群 G 的阶数).

设 $N\lhd G$. 则群 G 可解当且仅当 N 与 G/N 都可解.

(1.1.4) 定义　如群 G 可解, 且 G 有合成列

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_{s+1}=\{1\},$$

使 $G_i\lhd G,\forall i$, 则称 G 为**超可解群**.

令 p 为素数, $x\in G$. 如 x 的阶数是 p 的幂, 则称 x 为 p **元素**. 如 x 的阶数与 p 互素, 则称 x 为 p' **元素**.

显然, 恒等元 1 既是 p 元素又是 p' 元素. 1 是 G 中仅有的具有这种性质的元素.

$\forall x\in G$, 存在唯一分解式 $x=x'x''=x''x'$, 使 x' 为 p' 元素, x'' 为 p 元素, 此时称 x' 为 x 的 p' **部分**, x'' 为 x 的 p **部分**.

(1.1.5) 定义 阶数为 p 的幂的群称为 p 群. 阶数与 p 互素的群称为 p' 群. 称 G 为 p **可解群**, 如果存在 G 的子群列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{s+1} = \{1\},$$

使得 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant s, G_{i+1} \lhd G_i$, 且 G_i/G_{i+1} 要么是 p 群, 要么是 p' 群.

我们有关于群的集合的如下包含关系:

$\{p$ 群 $|p$ 为素数$\}\subseteq\{$幂零群$\}\subseteq\{$超可解群$\}\subseteq\{$可解群$\} \subseteq \{p$ 可解群 $|p$ 为素数$\}$.

由集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上所有置换组成的群称为 n 次对称群, 记作 S_n; 由 S_n 中所有偶置换组成的子群称为 n 次交代群, 记作 A_n.

群 S_n 与 A_n 当 $n \leqslant 4$ 时是可解群, 但当 $n \geqslant 5$ 时不是可解群.

如 G 是幂零群, 则 G 的任何真子群 H 的正规化子 $N_G(H)$ 一定严格包含 H. 群 G 是幂零群的充要条件是 G 为其 Sylow 子群的直积.

还有二族群在表示论中起着重要作用, 它们被分别称为初等群与拟初等群.

(1.1.6) 定义 如存在素数 p 使 H 为 p 群 P 与循环 p' 群 Z 的直积:

$$H = P \times Z, \tag{1}$$

则称 H 为 p **初等群** (或简称为**初等群**).

显然, 对于任何素数 p, 循环群总是 p 初等的; p 群与任何循环群的直积是 p 初等群. 初等群都是幂零群. 初等群的子群也是初等群.

(1.1.7) 定义 如存在素数 p 使 H 为循环 p' 群 Z 与 p 群 P 的半直积:

$$H = Z \rtimes P, \tag{2}$$

则称 H 为 p **拟初等群**(或简称为**拟初等群**).

在拟初等群 H 的分解式 (2) 中, Z 的取法唯一, 它是 H 的含有所有 p' 元素的特征子群.

p 拟初等群另有一个等价的定义: 如 H 是正规循环子群 A 与 p 群 P 的积:

$$H = AP, \tag{3}$$

则称 H 为 p 拟初等群.

任何初等群都是拟初等的. (2) 式中的 p 拟初等群 $H = Z \rtimes P$ 为初等群当且仅当 Z 属于 H 的中心, 也当且仅当 H 有正规的 Sylow p 子群.

(II) 群在集合上的作用

(1.1.8) 定义 给定群 G 与集合 Ω. 如 $\varphi:(x,w)\mapsto xw$ 为从 $G\times\Omega$ 到 Ω 内的映射使 $\forall x,y\in G$ 与 $w\in\Omega$, 下式成立:

$\mathbf{1}w=w$,

$(xy)w=x(yw)$,

则称 φ 为 G 在 Ω 上的**作用**, 称 Ω 为 G **集**. 称两个 G 集 Ω 与 Ω' 为**同构**的, 记作 $\Omega\cong\Omega'$, 如存在双射 $f:\Omega\to\Omega'$ 使

$$f(xw)=xf(w),\quad \forall w\in\Omega,\quad x\in G,$$

这里双射 $f:\Omega\to\Omega'$ 意味着存在映射 $g:\Omega'\to\Omega$ 使 $gf=1_\Omega$ 与 $fg=1_{\Omega'}$, 1_Ω 与 $1_{\Omega'}$ 分别为 Ω 与 Ω' 上的恒等映射.

令 Ω 为 G 集. $\forall x\in G$, 定义映射 $x_l:\Omega\to\Omega$ 如下:

$$x_lw=xw,\quad \forall w\in\Omega,$$

则有

$$1_l=1_\Omega,\quad (xy)_l=x_ly_l,\quad \forall x,y\in G.$$

故 $x\mapsto x_l$ 是从 G 到 Ω 上置换群 (后者同构于 $|\Omega|$ 次对称群) 内的一个同态.

在每个 G 集 Ω 上可定义关系 $\sim$ 如下: 令 $v,w\in\Omega$, 如存在 $x\in G$ 使 $w=xv$, 则记 $v\sim w$. 这是一个等价关系. 相应的等价类称为 G **轨道**, 或简称为**轨道**. 每个轨道也都是 G 集. 由一个轨道组成的 G 集称为**可迁** G **集**.

(1.1.9) 定义 令 Ω 为 G 集, $w\in\Omega$. 定义 w 在 G 中的**稳定子**为

$$\mathrm{Stab}_G(w):=\{x\in G|xw=w\}.$$

以记号 $H\leqslant G$ 表示 H 是群 G 的子群, $H<G$ 表示 H 是 G 的真子群. 注意 $\mathrm{Stab}_G(w)\leqslant G$. 如 $H\leqslant G$, 则左陪集空间 $G/H=\{yH|y\in G\}$ 在 G 的如下作用下形成可迁 G 集: $(x,yH)\mapsto xyH, \forall x,y\in G$.

此时, $H=\mathrm{Stab}_G(H)$.

以下命题刻画了有限 G 集.

(1.1.10) 命题 令 Ω 为 G 集.

(a) 设 Ω 是可迁的, $w,w'\in\Omega$, $H=\mathrm{Stab}_G(w)$ 与 $H'=\mathrm{Stab}_G(w')$. 则存在某 $x\in G$ 使 $w'=xw$, 且 $H'=xHx^{-1}$. 特别, 存在 G 集同构 $\Omega\cong G/H\cong G/H'$.

(b) 设 Ω 是可迁的. 设 G 与 Ω 作为集合都有限, 则

$$|\Omega|=[G:\mathrm{Stab}_G(w)],\quad \forall w\in\Omega.$$

特别, $|\Omega|\,\big|\,|G|$.

(c) 设 Ω 是有限集 (不必可迁). 令 $\{\Omega_i|i\in I\}$ 为 Ω 的 G 轨道集合, 则有

$$|\Omega|=\sum_{i\in I}|\Omega_i|$$

与 $|\Omega_i|=[G:\mathrm{Stab}_G(w_i)], \forall w_i\in\Omega_i, i\in I$.

(1.1.11) 例

(a) 设 $H\leqslant G$, 则 H 可通过左乘 $(h,x)\mapsto hx$ 作用于 G, 也可通过右乘 $(x,h)\mapsto xh^{-1}$ 作用于 G, 这里 $x\in G, h\in H$. 在第一种情形的 H 轨道是右陪集 $\{Hx\}$, 而在第二种情形的 H 轨道是左陪集 $\{xH\}$.

(b) 设 $H,K\leqslant G$. 则直积 $H\times K$ 以如下方式作用于 G:

$$((h,k),x)\mapsto hxk^{-1}, \forall x\in G, h\in H, k\in K.$$

此时的轨道是 (H,K) 双陪集 $\{HxK\}$.

(c) 设 $H\leqslant G$. H 可通过 G 的内自同构作用于 G:

$$(x,y)\mapsto xyx^{-1}=i_x(y),\quad \forall x\in H,\quad y\in G,$$

这里 i_x 是 G 的由 x 所决定的内自同构. 同态 $x\mapsto i_x$ 把 H 映到 G 的内自同构群内. 其核恰为 H与 G 的中心 $Z(G)$ 的交集 $H\bigcap Z(G)$. 此时的 H 轨道称为 G 的 H **共轭类**. 特别, 当 $H=G$ 时, H 轨道正好是 G 的共轭类. 以 $\mathrm{Cl}\,(G)$ 记群 G 的共轭类集合. 如 $\mathscr{C}\in\mathrm{Cl}\,(G), x\in\mathscr{C}$, 则 x 在 G 中的稳定子是 x 在 G 中的中心化子

$$C_G(x):=\{y\in G|yxy^{-1}=x\}.$$

我们有群 G 的类方程

$$|G|=|Z(G)|+\sum_x[G:C_G(x)],$$

右端和式里的 x 取遍 G 在 $G-Z(G)$ 中共轭类的一个代表系.

(1.1.12) 定义 设 $H\leqslant G$. 记 $N_G(H):=\{g\in G|gHg^{-1}\subseteq H\}$, 称之为 H 在 G 中的**正规化子**.

对于 $0\neq n\in\mathbb{Z}$ 和素数 p, 记 $n_p=p^a$ (或 $n_{p'}=|m|$), 如果 $n=p^am$, 其中 $a\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{Z}$ 满足 $p\nmid m$. 称 n_p 为 n 的 p **部分**, 称 $n_{p'}$ 为 n 的 p' **部分**.

(1.1.13) 定理 (Sylow) (a) 设 $|G|_p=p^a$, 其中 p 是素数. 则 G 含有 p^a 阶子群 (称为 G 的 **Sylow p 子群**). G 的所有 Sylow p 子群都互相共轭.

(b) G 的任何 p 子群都落在它的某个 Sylow p 子群里.

(c) 如果 G 是 p 群, 则 G 的中心 $Z(G):=\{g\in G|gx=xg,\forall x\in G\}$ 非平凡; $P<N_G(P), \forall P<G$.

(Ⅲ) 群由生成元与关系式来定义

(1.1.14) 定义　设 G 是群. $a_1, \cdots, a_n \in G$. $\{w_1, \cdots, w_t\}$ 是元素 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 及其逆元的一些乘积. 它们满足条件:

(a) $G = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ (即 G 由元素 $a_1, \cdots, a_n$ 生成), 且关系式 $w_1 = \mathbf{1}, \cdots, w_t = \mathbf{1}$ 都成立.

(b) 如 G' 是含元素 $a'_1, \cdots, a'_n$ 的另外一个群, 使得 $w'_1 = \cdots = w'_t = \mathbf{1}$ 在 G' 中成立, 这里 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant t, w'_i$ 可从 w_i 通过把因子 $a_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 换成 a'_j 而得, 则存在群的唯一同态 $\varphi : G \to G'$ 使 $\varphi(a_i) = a'_i, \forall i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

并称 G 有一个**表现** (presentation)

$$G = \langle a_1, \cdots, a_n | w_1 = w_2 = \cdots = w_t = \mathbf{1} \rangle.$$

由定义可知: 有相同表现的两个群是同构的.

(1.1.15) 例

(a) 阶数为 $2n$ 的二面体群 D_n 有表现

$$D_n = \langle r, s | r^n = s^2 = (rs)^2 = \mathbf{1} \rangle.$$

(b) 阶数为 $4m$ 的广义四元数群 Q_m 有表现

$$Q_m = \langle r, s | r^{2m} = r^m s^2 = rsrs^{-1} = \mathbf{1} \rangle.$$

(c) 有限生成的 Coxeter 群 W 有表现

$$W = \langle s_1, \cdots, s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathbf{1}, \forall i, j, 1 \leqslant i, j \leqslant n \rangle,$$

这里正整数 m_{ij} 满足

$$m_{ij} = m_{ji} \begin{cases} = 1, & \text{如} \ \ i = j, \\ > 1, & \text{如} \ \ i \neq j. \end{cases}$$

注意对称群 S_n 是 Coxeter 群, 它有表现

$$S_n = \langle s_1, \cdots, s_{n-1} | (s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathbf{1}, \forall i, j, 1 \leqslant i, j < n \rangle,$$

这里

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如} \ \ i = j \\ 2, & \text{如} \ \ i \neq j \pm 1, j, \\ 3, & \text{如} \ \ i = j \pm 1. \end{cases}$$

习　　题

1. 证明: 有限群 G 的每个元素 x 有唯一分解 $x = x'x'' = x''x'$ 使得 x' 是 p' 元素, x'' 是 p 元素

2. 设 $H = C \times P$ 是 p 初等群, 这里 C 是循环 p' 群, P 是 p 群. 求证:

(a) H 是幂零群. H 的每个子群都是 p 初等群.

(b) C 是 H 中所有 p' 元素的集合. P 是 H 中所有 p 元素的集合.

3. 验证拟初等群的子群也是拟初等群.

4. 设 X 是 G 集. 如 $\forall (u,v),(u',v') \in X \times X, u \neq v, u' \neq v'$, 存在 $g \in G$ 使 $gu = u'$ 与 $gv = v'$, 则称 X 为**双可迁的**. 设 G 是集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 上可迁置换群 (即 G 是满足以下条件的群: $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$, 存在 $g \in G$ 使 $gx_i = x_j$). 令 $H = \mathrm{Stab}_G(x_1)$. 求证:

(a) 存在元素 $g_1, \cdots, g_n \in G$ 使 $g_i(x_1) = x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 且

$$G = g_1H \bigcup \cdots \bigcup g_nH.$$

(b) X 上 H 轨道的个数等于 G 的 (H,H) 双陪集个数.

(c) 如 G 双可迁地作用于 X, 则 H 可迁地作用于 $X - \{x_1\}$.

5. 设 H, H' 与 K 是 G 的子群. 如存在 $k \in K$ 使 $H' = kHk^{-1}$, 则称 H 与 H' 为 **K 共轭的**. 验证 G 的 K 共轭于 H 的相异子群个数等于 $[K : N_K(H)]$, 这里 $N_K(H) := \{k \in K | H = kHk^{-1}\}$.

6. 试证存在严格的包含关系:

$$\{幂零群\} \subset \{超可解群\} \subset \{可解群\}.$$

7. Clifford 群 $\mathbb{CL}(n)$ 是一个由生成元集 $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, -1\}$ 和以下关系式所定义的群: $\gamma_i^2 = (-1)^2 = 1, (\gamma_i\gamma_j)^2 = -1, (-1)\gamma_i = \gamma_i(-1), \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, 这里 1 是群 $\mathbb{CL}(n)$ 的单位元. 证明:

(a) $\mathbb{CL}(n)$ 的阶数等于 2^{n+1}.

(b) $\mathbb{CL}(n)$ 的导群等于 $\{1, -1\}$.

(c) 设 $Z(\mathbb{CL}(n))$ 是 $\mathbb{CL}(n)$ 的中心. 当 n 是偶数时, $Z(\mathbb{CL}(n)) = \{1, -1\}$; 当 n 是奇数时, $Z(\mathbb{CL}(n)) = \{1, -1, \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n, -\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n\}$.

(d) $\mathbb{CL}(n)$ 的每个不属于中心的共轭类含有二个元素. 因此当 n 是偶数时, $\mathbb{CL}(n)$ 共有 $2^n + 1$ 个共轭类; 而当 n 是奇数时, $\mathbb{CL}(n)$ 共有 $2^n + 2$ 个共轭类.

§1.2 域的基本概念

本节概要地叙述后面要用到的域论中一些定义和结果.

(1.2.1) 如 F 是域 E 的子域, 则称 E 为 F 的**扩域**, 记作 E/F. 此时 E 可被自然地看作 F 空间, 其维数记作 $\dim_F E$. 如 $\dim_F E < \infty$, 则称 E/F 为**有限次扩域**. 如 $\dim_F E = \infty$, 则称 E/F 为**无限次扩域.**

如域 K 满足 $E \supset K \supset F$, 则称 K 为 E/F 的**中间域**. 此时如 E/F 是有限次扩域, 则等式 $\dim_F E = \dim_K E \cdot \dim_F K$ 成立.

(1.2.2) 记 $F[x]$ 为关于不定元 x 的系数属于域 F 的多项式组成的环. 设 $u \in E/F$. 如存在某非零多项式 $f \in F[x]$ 使得 $f(u) = 0$, 则称 u 为 F **上代数元**. 此时, 在 $F[x]$ 中存在唯一的满足等式 $g(u) = 0$ 的次数最小的首一多项式 $g(x)$ (最高次项系数等于 1 的多项式称为**首一多项式**), 称 $g(x)$ 为 u 在 F **上的最小多项式**. $g(x)$ 的次数称为 u **的次数**, 由 F 上代数元组成的扩域称为**代数扩域**. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的有限次代数扩域被称为**代数数域**. 由 F 上所有代数元组成的扩域称为 F **上的代数闭域**, 或简称**代数闭域**. 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的代数闭域, 但不是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的代数闭域. 这因为 $\mathbb{C}$ 里含有 $\mathbb{Q}$ 上的非代数元 (或称**超越元**). 由定义知, $F[x]$ 中任一正次数多项式在 F 上的代数闭域内有根.

(1.2.3) 如 S 是扩域 E/F 的子集, 则 E 内包含 $F \bigcup S$ 的最小子域称为 S 在 F **上生成的子域**, 记作 $F(S)$, E 内包含 $F \bigcup S$ 的最小子环称为 S 在 F **上生成的子环**, 记作 $F[S]$. 显然, $F[S]$ 必是整环, 特别, 当 S 是 F 上代数元集合时, 我们有 $F(S) = F[S]$.

(1.2.4) 设 E 是 F 的扩域, $f \in F[x]$. 如 f 在 $E[x]$ 内可分解为一次因子的乘积, 则称 f 在 E 上**分裂**. 显然, f 在 E 上分裂当且仅当 E 包含 f 的全部根. 使 f 在其上能分裂的最小扩域 E 称为 f 在 F 上的**分裂域**, 熟知 f 在 F 上的分裂域是有限次扩域.

(1.2.5) 设 E/F 是代数扩域. 如果 $F[x]$ 内任何不可约多项式只要在 E 内有一个根, 它就在 $E[x]$ 内分裂成一次因子的乘积, 则称 E/F 为**正规扩域**. 特别, F 上的代数闭域是正规扩域.

我们知道, 有限次扩域 E/F 是正规扩域当且仅当 E/F 是某一多项式 $f \in F[x]$ 的分裂域.

(1.2.6) 设 $f \in F[x]$. 如果 f 在 $F[x]$ 内的每个不可约因子都只有单根, 则称 f 在 F 上**可离**. 设 u 是 F 上代数元. 如 u 在 F 上的最小多项式是可离多项式, 则称 u 为 F 上**可离元**. 如果代数扩域 E/F 的每个元素都是 F 上可离元, 则称 E/F 为**可离扩域**. 如果域 F 的任何有限次扩域都是可离扩域, 则称 F 为**完善域** (perfect field). 记域 F 的特征数为 char.F. 则当 char.$F = 0$ 或 F 是有限域时, F 总是完善域.

(1.2.7) 给定二个扩域 E/F 与 E'/F. 如果 $\sigma : E \to E'$ 是域同态 (或域同构) 使得 $\sigma(x) = x, \forall x \in F$, 则称 σ 为 F **同态** (或 F **同构**), 令 $u \in E$ 与 $u' \in E'$ 为 F 上代数元, 则要使 u 与 u' 是同一不可约多项式 $f \in F[x]$ 的根当且仅当存在 F 同构 $\sigma : F(u) \to F(u')$ 使得 $\sigma(u) = u'$.

特别, 取 $E' = E$, 此时称 σ 为 E 的 F **自同构**. E 的 F 自同构全体形成一

个群, 记作 Gal E/F, 称为 E 在 F **上的伽罗华群**. 当 E/F 是有限次扩域时, 我们有 $|\mathrm{Gal}\ E/F| \leqslant \dim_F E$, 等号成立当且仅当 E/F 是正规可离扩域.

设 $f \in F[x], E/F$ 是 f 在 F 上的分裂域, 则 E/F 在 F 同构的意义下由 f 所唯一确定, 称 Gal E/F 为 **f 在 F 上的伽罗华群**.

(1.2.8) 给定 $u, u' \in E/F$. 如果存在 $\sigma \in \mathrm{Gal}\ E/F$ 使得 $u' = \sigma(u)$, 则称 u 与 u' 在 F 上**伽罗华共轭**. 这是 E/F 中的一个等价关系, 相应的等价类称为 F 上的**伽罗华共轭类**. $u \in E/F$ 所在的 F 上伽罗华共轭类的基数 $\leqslant \dim_F F(u)$, 等号成立当且仅当 E/F 是正规扩域且 u 是 F 上可离元.

设 E/F 是正规扩域, K, K' 是 E/F 的中间域. 如果存在 $\sigma \in \mathrm{Gal}\ E/F$ 使得 $K' = \sigma(K)$, 则称 K 与 K' 在 F 上**共轭**.

设 E/F 是正规扩域, K 是 E/F 的中间域, 如果存在 F 同态 $\tau : K \to E$, 则 τ 必可扩充为 E 的 F 自同构.

(1.2.9) 设 E/F 是扩域, 如果存在 $G \leqslant \mathrm{Gal}\ E/F$ 使得

$$F = \mathrm{Inv}_G(E) := \{x \in E | \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G\},$$

则称 E 为 F 的**伽罗华扩域**, 或称 E/F 为**伽罗华**的.

熟知 E/F 是有限次伽罗华扩域当且仅当 E/F 是有限次正规可离扩域.

设 E/F 是有限次伽罗华扩域, $G = \mathrm{Gal}\ E/F$. 对于 E/F 的任何中间域 K, 可以定义 G 的一个子群

$$\mathrm{Gal}\ E/K = \{\sigma \in G | \sigma(x) = x, \forall x \in K\},$$

对于 G 的任何子群 H, 可以定义 E/F 的一个中间域

$$\mathrm{Inv}_H(E) = \{x \in E | \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\},$$

则 $K \mapsto \mathrm{Gal}\ E/K, H \mapsto \mathrm{Inv}_H(E)$ 在 G 的所有子群与 E/F 的所有中间域之间定义了一个逆序双射. 设 H_1, H_2 分别是 G 的与中间域 K_1, K_2 相对应的子群, 则 K_1, K_2 在自同构 $\sigma \in G$ 之下共轭当且仅当 H_1 与 H_2 是 G 的共轭子群: $H_2 = \sigma H_1 \sigma^{-1}$. 特别, K/F 是正规扩域当且仅当 Gal $E/K = H$ 是 G 的正规子群. 此时,Gal $K/F \cong G/H$.

下面我们要考虑一个特殊的伽罗华扩域.

(1.2.10) 方程 $x^n = 1$ 的根称为 n 次单位根, 在任何域 F 内, $x^n = 1$ 的根全体关于乘法形成一个循环群. 如果 $\xi \in F$ 满足

$$\xi^k = 1 \Leftrightarrow n|k \text{ (记号 } n|k \text{ 表示 } n \text{ 整除 } k),$$

则称 ξ 为 **n 次单位原根**. 对于正整数 n, 令 $\varphi(n)$ 为集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中与 n 互素的整数个数, 称 $\varphi(n)$ 为**欧拉函数**. 熟知 $\varphi(n)$ 恰等于 n 次单位原根的个数. 欧拉函数满足如下性质:

(a) 如 $(m,n)=1$, 则 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

(b) 如 p 是素数, $e>0$, 则 $\varphi(p^e)=p^{e-1}(p-1)$.

设 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 是域 F 里所有 n 次单位原根, 这里 $r=\varphi(n)$, 则多项式

$$\Phi_n(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\xi_i)$$

称为 n **次分圆多项式**, 它的次数是 $\varphi(n)$. 熟知有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的分圆多项式都不可约.

设域 F 满足 char. $F=0$ 或 char. $F=p\nmid n$. 令 ξ 为任何 n 次单位原根, 则 $F(\xi)/F$ 是 n 次分圆多项式的分裂域, 它也是伽罗华扩域, 称为 F 上 n **次分圆域**. 熟知 Gal $F(\xi)/F$ 是阿贝尔群.

(1.2.11) 记 K^* 为由 K 的非零元组成的乘法群. K 的**离散赋值**是一个映射 $\nu:K\to\mathbb{Z}\bigcup\{\infty\}$, 使得 $\nu(0)=\infty,\nu(K^*)=\mathbb{Z}$, 且限制映射 $\nu:K^*\to\mathbb{Z}$ 满足条件: $\forall x,y\in K^*$,

(a) $\nu(xy)=\nu(x)+\nu(y)$.

(b) $\nu(x+y)\geqslant\min(\nu(x),\nu(y))$.

集合 $R=\{x\in K|\nu(x)\geqslant 0\}$ 是 K 的子环, 称为 ν 的**赋值环**(也称为 K 的 ν **整数环**, 或简称为 K 的**整数环**). R 有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}=\{x\in K|\nu(x)\geqslant 1\}$, 这是由任何满足等式 $\nu(\pi)=1$ 的元素 $\pi\in\mathfrak{m}$ 所生成的主理想 (称 π 为 R 的一个**素元**); R 的每个非零理想有形状 $\pi^kR(k\geqslant 0)$. 域 K 由 R 所生成, 称为 R 的**分式域**. 称商域 $k=R/\mathfrak{m}$ 为 R (或 ν) 的**剩余类域**.

域 K 上的离散赋值 ν 引起空间 K 上的一个拓扑结构: $\forall a\in K$, 以 $B(a)_n:=\{x\in K|x-a\in\mathfrak{m}^n\}(n\in\mathbb{N})$ 为其开邻域. 环之间的典范映射 $\phi_{mn}:R/\mathfrak{m}^n\to R/\mathfrak{m}^m,n\geqslant m$, 满足等式 $\phi_{lm}\phi_{mn}=\phi_{ln},\forall n\geqslant m\geqslant l$. 可以证明: 在同构的意义下存在唯一的环 R_0 和环同态 $\phi_n:R_0\to R/\mathfrak{m}^n(n\in\mathbb{N})$ 满足等式 $\phi_{mn}\phi_n=\phi_m,\forall n\geqslant m$ (称 $(R_0,\{\phi_n|n\in\mathbb{N}\})$ 为**射影系** $(\{R/\mathfrak{m}^n|n\in\mathbb{N}\},\{\phi_{mn}|n\geqslant m\})$ 的**射影极限**). 可以证明: 如果存在环同构 $R\cong R_0$, 则 K 关于该拓扑是**完备**的.

例如, 对于素数 $p>0$, 定义函数 $\nu_p:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\bigcup\{\infty\}$ 如下: $\nu_p(0)=\infty$; 如果 $0\neq n\in\mathbb{Z}$ 和 $|n|_p=p^a$, 则记 $\nu_p(n)=a$; 如果 $0\neq r,s\in\mathbb{Z}$, 则记 $\nu_p\left(\frac{r}{s}\right)=\nu_p(r)-\nu_p(s)$. 显然, $\forall x,y\in\mathbb{Q}^*$, 恒有 $\nu_p(xy)=\nu_p(x)+\nu_p(y)$. 所以 ν_p 是域 $\mathbb{Q}$ 上的一个离散赋值. 相应的赋值环是 $R=\left\{\frac{r}{s}\middle|r,s\in\mathbb{Z},p\nmid s\right\}$, p 是 R 的素元, $\mathfrak{m}=\left\{\frac{r}{s}\in R\middle|r,s\in\mathbb{Z},\gcd(r,s)=1,p|r\right\}$ 是 R 的极大理想, $k=R/\mathfrak{m}\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是相应的剩余类域.

习　题

1. 设 $E=\mathbb{Q}(r)$, 这里 $r^3+r^2-2r-1=0$. 验证 $r'=r^2-2$ 也是多项式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 的根. 确定 Gal $E/\mathbb{Q}$. 证明 $E/\mathbb{Q}$ 是正规扩域.

2. 设 E/F 是有限次伽罗华扩张, K 是中间域,

$$G=\{\sigma\in \text{Gal } E/F|\sigma(K)\subset K\}.$$

证明 G 是 Gal E/K 在 Gal E/F 内的正规化子, 并描述

$$G/(\text{Gal } E/K).$$

3. 设 $E/\mathbb{Q}$ 是 x^5-2 的分裂域. 试计算 $[E:\mathbb{Q}]$, 确定 Gal $E/\mathbb{Q}$ 的所有子群和 $E/\mathbb{Q}$ 的相应中间域.

4. 证明 $\Phi_{p^m}(x)=1+x^q+x^{2q}+\cdots+x^{(p-1)q}$, 这里 $q=p^{m-1}$, p 是素数.

§1.3　F 代数的基本概念

自本节起, 我们要较系统地讨论 F 代数, 特别是半单 F 代数的结构及其表示的基本性质, 这些结果对于今后阐述群表示理论至关重要.

如不特别申明, 本书所考虑的环 A 都含恒等元 1_A (有时简记为 1), 并设定: 从环 A 到 B 内的环同态总把 1_A 映到 1_B; 1_A 对于 A 模总是恒等算子.

(1.3.1) 定义　*设 A 是域 F 上向量空间兼环, 并满足*

$$(cx)y=c(xy)=x(cy),\quad \forall c\in F, x,y\in A,$$

则称 A 为 **F 代数**.

在本书里我们规定: 任何 F 代数作为 F 空间都是有限维的. 在不致引起混淆的情形下, 我们常简称 F 代数为代数.

关于 F 代数的例子如下:

(1.3.2) 例

(a) 域 F 上的 $n\times n$ 矩阵全体 $M_n(F)$ 关于通常所定义的矩阵加法、乘法与 F 的纯量作用形成 F 代数, 特别, $F=M_1(\text{F})$ 是 F 代数.

(b) 令 V 为 F 空间. V 的 F 线性变换集合 $\text{End}_F V$ (有时简记为 End V) 在如下定义的合成下成为 F 代数: $\forall x,y\in \text{End}V, c\in F$ 与 $v\in V$,

$(xy)(v):=x(y(v))$,

$(cx)(v):=x(cv)$,

$(x+y)(v):=x(v)+y(v)$.

(c) 设 G 是群. 令 $F[G]$ 为由所有形式和 $\sum_{x\in G}\alpha_x x, \alpha_x \in F$, 组成的集合, 则 $F[G]$ 在如下定义的合成下成为 F 代数:

$$\sum_x \alpha_x x + \sum_x \beta_x x = \sum_x (\alpha_x + \beta_x)x,$$

$$\left(\sum_x \alpha_x x\right)\left(\sum_y \beta_y y\right) = \sum_{x,y} \alpha_x \beta_y xy,$$

$$c\left(\sum_x \alpha_x x\right) = \sum_x c\alpha_x x,$$

这里 $\alpha_x, \beta_x, c \in F$. 我们称 $F[G]$ 为群 G 在域 F 上的**群代数**. 以后我们将证明: 关于 G 在 F 上的表示与关于 $F[G]$ 模的讨论实质上是一回事. 这正是此处介绍 F 代数及其模的性质的目的.

(1.3.3) 定义 设 A 是 F 代数. 如 B 是 A 的含 1_A 的子环兼 F 子空间, 则 B 也是 F 代数. 称 B 为 A 的 F **子代数**或**子代数**.

每个 F 代数 A 总含有子代数 $F1_A$.A 的中心

$$Z(A) = \{x \in A | ax = xa, \quad \forall a \in A\}$$

也是 A 的 F 子代数. 根据定义, A 的任何 F 子代数含有 $F1_A$.

(1.3.4) 定义 设 A 与 B 是二个 F 代数. 设映射 $\varphi: A \to B$ 满足:

(a) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in A$.

(b) $\varphi(1_A) = 1_B$,

(c) φ 是 F 线性映射,

则称 φ 为 F **代数同态**. 此时, 如果存在 F 代数同态 $\psi: B \to A$ 使 $\psi\cdot\varphi$ 与 $\varphi\cdot\psi$ 分别为 A 与 B 上的恒等映射, 则称 φ 为 F **代数同构**.

显然, F 代数同态 $\varphi: A \to B$ 为 F 代数同构当且仅当 φ 是双射, 也当且仅当 φ 满足:

(d) $\forall x, y \in A, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$ (单射性),

(e) $\forall z \in B$, 存在 $x \in A$ 使 $z = \varphi(x)$ (满射性).

容易看出: $c \mapsto c1_A$ 给出从 F 到 F 代数 A 的子代数 $F1_A$ 上的 F 代数同构, 故可把 F 与 $F1_A$ 等同起来, 另外, 如 F 代数 A 有 F 子代数 E 使得 $E \subseteq Z(A)$, 且 E 本身是域, 则 A 也有一个自然的 E 代数结构.

(1.3.5) 定义 设 A 是 F 代数, V 是有限维 F 空间. 设存在映射

$$A \times V \to V,$$
$$(a, v) \longmapsto av$$

满足: $\forall a, b \in A, v, w \in V$ 与 $c \in F$.

(a) $a(v+w) = av + aw$.

(b) $(a+b)v = av + bv$.

(c) $(ab)v = a(bv)$.

(d) $(ca)v = a(cv) = c(av)$.

(e) $1v = v$.

则称 V 为 F **代数 A 上的模**, 或简称 **A 模**.

由定义可见: 如 V 是 F 代数 A 上的模, 则 V 也是把 A 当作环时的 A 模. 故关于一般环上模的一些结果, 诸如关于模的合成因子的 Jordan-Hölder 定理等, 也易被证明适用于 F 代数上的模.

关于 F 代数 A 上模的例子如下:

(1.3.6) 例

(a) 设 V 是有限维 F 空间. 设 $A \subseteq \mathrm{End}V$, 则 V 有自然的 A 模结构.

(b) 设 $A = M_n(F), n$ 为正整数, 则 F 上 n 维列向量组成的空间在矩阵的左乘作用下成为 A 模.

(c) 如 A 是任何 F 代数, 则 A 在其本身的左乘作用下成为 A 模, 称其为**正则 A 模**, 记作 ${}_AA$.

(d) 设 $\varphi: A \to B$ 是 F 代数同态. 定义 A 对于 B 的作用如下:

$$a \cdot b = \varphi(a)b, \forall a \in A, b \in B,$$

则 B 成为 A 模. 特别, 当 A 是 B 的 F 子代数时, B 在 A 的左乘作用下成为 A 模.

在本节的剩余部分, 总设定 A 是 F 代数.

(1.3.7) 定义 设 V 与 W 是二个 A 模. 令 $\varphi: V \to W$ 为 F 线性映射且满足

$$\varphi(av) = a\varphi(v), \quad \forall v \in V, \quad a \in A,$$

则称 φ 为 **A 模同态**. 此时如果存在 A 模同态 $\psi: W \to V$ 使 $\psi \cdot \varphi = 1_V$ 与 $\varphi \cdot \psi = 1_W$, 这里 1_V 与 1_W 分别是 V 与 W 上的恒等映射, 则称 φ 为 **A 模同构**. 显然, φ 是 A 模同构当且仅当 φ 是双射, 当 φ 是 A 模同构时, 称 V 与 W **为同构的 A 模**, 记作 $V \cong W$.

给定 A 模 V, 每个元素 $a \in A$ 确定了满足等式

$$a_V(v) = av, \forall v \in V$$

的一个映射 $a_V : V \to V$. 由定义 (1.3.5) 知: $a_V \in \text{End } V$, 且 $a \mapsto a_V$ 是从 A 到 End V 内的 F 代数同态, 记其像为 A_V.

(1.3.8) 定义 设 V 是有限维 F 空间. 如果 $\rho : A \to \text{End } V$ 为 F 代数同态, 则称 ρ 为 A **表示**. 为明确起见, 有时用 (ρ, V) 来记 A 的这一表示, V 的维数 $\dim_F V$ (为简化记号起见, 下标 F 常被省去) 被称为表示 ρ 的**次数**, 记作 $\deg \rho$.

A 的二个表示 (ρ, V) 与 (ρ', V') 称为**等价的**, 记作 $(\rho, V) \sim (\rho', V')$, 如存在 F 线性同构 $\eta : V \to V'$ 使

$$\rho'(a) = \eta\rho(a)\eta^{-1}, \ \forall a \in A.$$

容易看出: 每个 A 模决定了唯一的 A 表示, 反之, 每个 A 表示也决定了唯一的 A 模. 二个 A 模同构当且仅当它们决定了等价的 A 表示.

(1.3.9) 固定 A 模 V 与 W. 则从 V 到 W 内的 A 模同态集合 $\text{Hom}_A(V, W)$ 有一个 F 空间结构: $\forall c \in F, v \in V$ 与 $f, g \in \text{Hom}_A(V, W)$,

$(cf)(v) := cf(v)$,

$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$.

进而, 定义 $f, g \in \text{Hom}_A(V, V)$ 的积 $f \cdot g$ 为

$$(f \cdot g)(v) := f(g(v)), \quad \forall v \in V,$$

则 F 空间 $\text{Hom}_A(V, V)$ 关于以上定义的乘法形成 F 代数. 显然, $\text{Hom}_A(V, V)$ 恰为 A_V 在 End$V$ 内的中心化子, 记其为 $\text{End}_A V$.

(1.3.10) 定义 设 V 是 A 模, W 是 V 的 A 不变子空间, 即

$$aw \in W, \quad \forall a \in A \text{ 与 } w \in W,$$

则称 W 为 V 的 A **子模**. 此时, 商空间 V/W 有自然的 A 模结构:

$$a(v + W) := av + W, \quad \forall v \in V \text{与} a \in A,$$

称 V/W 为 V 关于子模 W 的**商模**.

易见: 对于 A 模 V, W 与 $\varphi \in \text{Hom}_A(V, W)$, φ 的核

$$\text{Ker } \varphi := \{x \in V | \varphi(x) = 0\}$$

与像

$$\text{Im } \varphi := \{y \in W | \text{存在} x \in V \text{使} y = \varphi(x)\}$$

分别是 V 与 W 的 A 子模.

对于 A 模 V, 零模 O 与 V 总是 V 的子模, 称它们为 V 的**平凡子模**.

(1.3.11) 例 正则模 ${}_AA$ 的子模恰为 A 的左理想 (注: F 代数 A 的左理想是指把 A 当作环时的左理想, 同样可定义 A 的右理想与双边理想).

习 题

1. 设 $F[G]$ 是群 G 在域 F 上的群代数. 证明元素 $\sum_{x\in G} x$ 属于 $F[G]$ 的中心. 更一般地, 如 $\mathscr{C}$ 是 G 的一个共轭类, 则 $\sum_{x\in\mathscr{C}} x$ 属于 $F[G]$ 的中心. 由此证明 $F[G]$ 的中心的 F 维数等于 G 的共轭类的个数.

2. 考虑群代数 $A = F[G]$. 置 $N = \left\{ \sum_{x\in G} \alpha_x x \,\middle|\, \alpha_x \in F, \sum_{x\in G} \alpha_x = 0 \right\}$. 证明 N 是正则 A 模 ${}_AA$ 的子模. 讨论商模 ${}_AA/N$ 的结构.

3. 给定群 G 与域 F, 令 $\mathscr{F}(G,F)$ 为 G 上 F 值函数的集合. $\forall f, f_1, f_2 \in \mathscr{F}(G,F)$ 与 $\alpha \in F$, 定义 $\mathscr{F}(G,F)$ 的元素 $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $\alpha \circ f$ 如下: $\forall t \in G$,

$(f_1 + f_2)(t) := f_1(t) + f_2(t)$,

$(f_1 \cdot f_2)(t) := \sum_{g\in G} f_1(g) f_2(g^{-1}t)$,

$(\alpha \circ f)(t) := \alpha f(t)$.

证明 $\mathscr{F}(G,F)$ 关于合成 $+$, $\cdot$ 与 $\circ$ 成为 F 代数. 定义映射 $\varphi : F[G] \to \mathscr{F}(G,F)$ 使得 $\varphi(h)(g) = \alpha_g, \forall h = \sum_{g\in G} \alpha_g g \in F[G]$. 证明 φ 是 F 代数同构.

§1.4 F 代数上模的分解

在本节里, 总设定 A 是 F 代数.

(1.4.1) 定义 如 V 是非零 A 模, 它的仅有子模是平凡子模, 则称 V 为**不可约 A 模**.

(1.4.2) 引理 (Schur) 设 V 与 W 是两个不可约 A 模, 则 $\mathrm{Hom}_A(V,W)$ 的每个非零元素都是 A 模同构.

证 设 φ 是 $\mathrm{Hom}_A(V,W)$ 的非零元素. 则 $\mathrm{Im}\,\varphi \neq 0$ 与 $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq V$. 但 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 与 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 分别是 V 与 W 的子模. 由 V 与 W 的不可约性知: $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ 与 $\mathrm{Im}\,\varphi = W$. 故 φ 是 A 模同构. □

Schur 引理的一个直接推论是: 如 V 是不可约 A 模, 则 $\mathrm{End}_A V$ 是可除代数, 即 $\mathrm{End}_A V$ 的每个非零元素是可逆元.

(1.4.3) 推论 设 F 是代数闭域, V 是不可约 A 模, 则

$$\mathrm{End}_A V = F1_V,$$

这里 $F1_V$ 是 V 上 F 纯量线性变换的集合.

证 显然, $F1_V \subseteq \mathrm{End}_A V$. 令 $\varphi \in \mathrm{End}_A V$, 则 φ 是有限维 F 空间 V 上的线性变换. 因为 F 是代数闭域, φ 在 F 上有特征值 λ. 于是 $\varphi - \lambda 1_V$ 是 $\mathrm{End}_A V$ 中非可逆元. 根据引理 (1.4.2), 我们有 $\varphi - \lambda 1_V = 0$, 即 $\varphi = \lambda 1_V \in F1_V$, 也即 $\mathrm{End}_A V \subseteq F1_V$. 因此 $\mathrm{End}_A V = F1_V$. □

(1.4.4) 定义 设 V 是 A 模. 如果 V 是不可约子模的直和, 则称 V 为**完全可约模**.

如果一个模是完全可约的, 则一旦知道了该模的所有不可约子模的结构, 整个模的结构也就清楚了. 因此, 完全可约性是模的一种很好性质. 下面是关于模的完全可约性的几种等价叙述.

(1.4.5) 定理 设 V 是 A 模. 则下述条件等价:

(a) V 是完全可约模.

(b) V 是不可约子模的和.

(c) 对于任何子模 $U \subseteq V$, 存在子模 $W \subseteq V$ 使 $V = U \oplus W$.

(d) 对于任何不可约子模 $U \subseteq V$, 存在子模 $W \subseteq V$ 使 $V = U \oplus W$.

证 (a) $\Rightarrow$ (b): 显然.

(b) $\Rightarrow$ (c): 设 $V = \sum_i V_i$, 这里 V_i 是 V 的不可约子模. 设 U 是 V 的子模. 由 V 作为 F 空间的维数的有限性知: 存在使等式 $U \bigcap W = 0$ 成立的极大子模 $W \subseteq V$. 我们断言: $U + W = V$. 这因为: 否则的话, 可取 $V_i \not\subseteq U + W$. 由 V_i 的不可约性知: $(U + W) \bigcap V_i = 0$. 由此推出 $U \bigcap (W + V_i) = 0$, 这与 W 的极大性矛盾. 因此 $V = U \oplus W$.

(c) $\Rightarrow$ (d): 显然

(d) $\Rightarrow$ (a): 令 U_1 为 V 的任何不可约子模. 则存在 V 的子模 U_1' 使得

$$V = U_1 \oplus U_1'.$$

于是 V 的每个含 U_1 的子模 L 有分解式

$$L = U_1 \oplus (L \bigcap U_1').$$

由 V 的维数的有限性知: V 的每个非零子模都含有不可约子模. 故由上式推出 V 的每个非零子模都可分解成一个不可约子模与另一个子模的直和. 据此, 如果 $U_1' \neq 0$, 则存在 U_1' 的不可约子模 U_2 与子模 U_2' 使得 $U_1' = U_2 \oplus U_2'$. 于是

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_2'.$$

再对 U_2' 重复相同的过程. 由 V 的维数的有限性知: 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n,$$

这里 $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 都是 V 的不可约子模. 因此 V 完全可约. □

(1.4.6) 定义 设 V 是完全可约 A 模, M 是不可约 A 模, 记 $V(M)$ 为 V 中所有同构于 M 的子模的和, 称之为 V **的 M 齐次分支**, 或 V **的齐次分支**.

显然, 如果 M 与 N 是同构的不可约 A 模, 则 $V(M) = V(N)$. 如果 V 没有同构于 M 的子模, 则 $V(M) = 0$.

以下命题给出了完全可约 A 模的齐次分支的性质. 这些性质在一定程度上刻画了完全可约 A 模的结构.

对于任意 A 模 V, $\mathrm{End}_A V$ 也是一个 F 代数, 而 V 有自然的 $\mathrm{End}_A V$ 模结构.

(1.4.7) 命题 设 $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$, 这里 W_i 为不可约 A 模, I 为有限指标集. 令 M 为任意不可约 A 模.

(a) $V(M)$ 是 V 的 $\mathrm{End}_A V$ 子模.

(b) $V(M) = \bigoplus_{j \in J} W_j$, 这里 $J = \{i \in I | W_i \cong M\}$.

(c) $|J|$ 是 V 的不变量, 与 V 的具体分解无关.

证 (a) 令 $\varphi \in \mathrm{End}_A V$, 我们必须证明: $\varphi(V(M)) \subseteq V(M)$. 因为 $V(M)$ 是 V 的所有同构于 M 的子模的和, 所以我们只须证明: 如果 $W \subseteq V$ 满足 $W \cong M$, 则 $\varphi(W) \subseteq V(M)$. 由于 $\varphi(W) = 0$ 的情形是平凡的, 不妨设 $\varphi(W) \neq 0$. 由 W 的不可约性知: 存在 A 模同构 $\varphi(W) \cong W \cong M$. 于是 $\varphi(W) \subseteq V(M)$.

(b) 一般有 $\bigoplus_{j \in J} W_j \subseteq V(M)$. 我们知道: 任何 $v \in V$ 可唯一地表为形状 $v = \sum_i v_i$, 这里 $v_i \in W_i$. 今定义映射

$$\pi_j : V \to W_j, \forall j \in I$$
$$\sum_i v_i \mapsto v_j$$

称之为从 V 到 W_j 上的**射影**. 它是一个 A 模同态. 现设 $W \subseteq V$ 与 $W \cong M$. 如果 $\pi_j(W) \neq 0$, 则由 W_j 的不可约性知: $\pi_j(W) = W_j \cong W$. 于是 $\pi_j(W) \subseteq \bigoplus_{i \in J} W_i, \forall j \in I$. 另一方面, 显然有 $W \subseteq \bigoplus_{j \in I} \pi_j(W)$. 故 $W \subseteq \bigoplus_{j \in J} W_j$. 这说明 $V(M) \subseteq \bigoplus_{j \in J} W_j$.

(c) 由 (b) 知: $\dim V(M) = |J| \dim M$. 由此推出 $|J|$ 是 V 的与分解无关的不变量. □

在上述命题中, 以 $n_M(V)$ 记 $|J|$.

由上述命题的 (b) 可见: 完全可约 A 模是其相异的齐次分支的直和. 特别, 如果 M 与 N 是互不同构的不可约 A 模, 则 $V(M)\bigcap V(N)=0$.

(1.4.8) 例 正则模 $_AA$ 的不可约子模恰为 A 的非零极小左理想. 于是正则模 $_AA$ 完全可约当且仅当 A 可表为极小左理想的直和. 以后要证明: 完全可约的正则模 $_AA$ 的齐次分支恰为 A 的非零极小理想.

习 题

1. 设 char. $F=p>0, p\big||G|$. 令 $n=\sum\limits_{x\in G}x\in A=F[G]$. 则 An 是正则 A 模 $_AA$ 的子模, 但不是 $_AA$ 的直和项.

2. (Schur 引理的逆) 令 M 为完全可约 A 模, 这里 A 是 F 代数. 证明:

(a) 如果 $\mathrm{End}_A(M)=F1_M$, 则 M 是不可约 A 模.

(b) 令 M 为二维 F 空间. 则 M 是代数 $A=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in F\right\}$ 上的模. 证明此时 M 可约但非完全可约, 且 $\mathrm{End}_A(M)=F1_M$. 这说明当 M 不是完全可约时结论 (a) 一般不成立.

3. 设 V 是 A 模. 证明: V 完全可约当且仅当 V 的所有极大子模的交平凡.

§1.5 半单代数及其正则模的分解

仍设 A 是 F 代数. 我们希望讨论 "所有的不可约 A 模", 更确切地说,"所有不可约 A 模的同构类". 令 $\mathscr{M}(A)$ 为不可约 A 模的集合使得每一个不可约 A 模恰与 $\mathscr{M}(A)$ 里的一个元素同构. 称 $\mathscr{M}(A)$ 为**不可约 A 模同构类的代表系**. 由于模是 F 代数之外的一个概念, 对于给定的 F 代数 A, 如何找不可约 A 模的代表系并非显然的事, 为此我们要构造一个 A 模, 使其子模集合含有不可约 A 模的一个代表系.

(1.5.1) 定义 如 F 代数 A 的正则模 $_AA$ 完全可约, 则称 A 为**半单的**.

(1.5.2) 定理 设 A 是半单代数, 则任何 A 模都完全可约.

证 可写 $A=\sum\limits_i I_i$, 这里 I_i 取遍 A 的极小左理想. 令 M 为任何 A 模. 令 x 为 M 的非零元素, 则 $x=1x\in Ax=\sum\limits_i I_ix$. 由引理 (1.4.2) 知: 要么 $I_ix=0$, 要么 I_ix 是同构于 I_i 的不可约模. 令 $M=\sum\limits_{x\in M}Ax=\sum\limits_{i,x}I_ix$ 是不可约 A 模的和, 故由定理 (1.4.5) 知: M 完全可约. □

(1.5.3) 引理 设 A 是 F 代数, 则每个不可约 A 模同构于 ${}_AA$ 的一个商模. 特别, 当 A 是半单时, 每个不可约 A 模同构于 ${}_AA$ 的一个子模.

证 设 V 是不可约 A 模. 取非零元 $v \in V$. 定义映射 $\varphi : A \to V$ 使 $\varphi(x) = xv, \forall x \in A$. 则 φ 是 F 线性的, 且 $\varphi(xy) = xyv = x\varphi(y), \forall x, y \in A$. 于是 $\varphi \in \mathrm{Hom}_A({}_AA, V)$. 今 $v \in \mathrm{Im}\varphi \subseteq V$. 由 V 的不可约性知: $\mathrm{Im}\,\varphi = V$. 记 $W = \mathrm{Ker}\,\varphi$, 则 $V \cong {}_AA/W$. 如果 A 是半单的, 则由定理 (1.4.5) 知: 存在 ${}_AA$ 的子模 U 使 ${}_AA = W \oplus U$. 因此 ${}_AA/W \cong U$. □

现固定不可约 A 模的一个代表系 $\mathscr{M}(A)$. 由命题 (1.4.7) (b) 知: 对于完全可约 A 模 V, 有分解式

$$V = \bigoplus_{M \in \mathscr{M}(A)} V(M).$$

设 A 是半单代数, 则正则 A 模有形状

$${}_AA = \bigoplus_{M \in \mathscr{M}(A)} {}_AA(M).$$

下面我们要证明: 每个 ${}_AA(M)$ 实际上是 A 的双边理想. 为简化符号起见, 我们用 $A(M)$ 来记 ${}_AA(M)$.

(1.5.4) 定理 (Wedderburn) 设 A 是半单代数, M 是不可约 A 模. 则

(a) $A(M)$ 是 A 的极小非零理想, 它也是带有恒等元的单代数 (注: 不含非平凡理想的代数称为**单代数**).

(b) 对于任何不同构于 M 的 $W \in \mathscr{M}(A)$, $A(W)$ 零化 M. 特别, $A(W)A(M) = 0$.

(c) $x \mapsto x_M$ 是从 $A(M)$ 到 $A_M \subseteq \mathrm{End}M$ 上的 F 代数同构.

(d) $\mathscr{M}(A)$ 是有限集合. 于是 $A = \bigoplus_{N \in \mathscr{M}(A)} A(N)$ 是有限个 F 单代数 $A(N)$ 的直和.

证 $\forall x \in A$, 映射 $\varphi_x : y \mapsto yx$ 属于 $\mathrm{End}_A({}_AA)$. 故由命题 (1.4.7)(a) 知

$$A(M)x = \varphi_x(A(M)) \subseteq A(M).$$

因为 $A(M)$ 是 A 的左理想, 所以 $A(M)$ 是 A 的理想. (a) 中的其它结论待证明了 (b) 和 (c) 之后再证.

如 W 是不同构于 M 的不可约 A 模, 则由命题 (1.4.7)(b) 得

$$A(W) \bigcap A(M) = 0.$$

由于 $A(W)$ 和 $A(M)$ 都是 A 的理想, 我们有

$$A(W)A(M) = 0.$$

据引理 (1.5.3), A 有子模 M_0 满足 $M_0 \cong M$ 与 $M_0 \subseteq A(M)$. 故 $A(W)$ 零化 M_0. 因为 $M \cong M_0$, 所以 M 与 M_0 在 A 中有相同的零化子. 因此 $A(W)$ 也零化 M. 这证明了 (b).

由此可见: $A(M)$ 实际上是一个 F 代数, 其恒等元是 1_A 在分解式 $A = \bigoplus_{N\in\mathscr{M}(A)} A(N)$ 的直和项 $A(M)$ 上的分量 1_M.

据 (b), 如 $W \not\cong M$ 与 $x \in A(W)$, 则 $x_M = 0$. 现从分解式 $A = \bigoplus_{N\in\mathscr{M}(A)} A(N)$ 推知: $\forall y \in A$, 令 $x \in A(M)$ 为 y 的直和分量, 则 $y_M = x_M$. 因为 $y \mapsto y_M$ 是从 A 到 A_M 上的 F 代数满同态, 所以 $x \mapsto x_M$ 是从 $A(M)$ 到 A_M 上的 F 代数满同态. 如果 $x \in A(M)$ 满足 $x_M = 0$, 则由 (b) 知: x 零化每个不可约 A 模, 因而 x 零化每个完全可约 A 模, 我们有 $x = x1 \in x \cdot {}_AA = 0$. (c) 得证.

现要证明 $A(M)$ 作为非零理想的极小性. 令 $I \subsetneq A(M)$ 为 A 的理想. 由于 $A(M)$ 是同构于 M 的子模和, $A(M)$ 中存在同构于 M 的子模 $M_0 \not\subseteq I$. 由 M_0 的不可约性知: $M_0 \bigcap I = 0$. 这推出: $IM_0 \subseteq I \bigcap M_0 = 0$, 即 I 零化 M_0. 于是 I 也零化 M. 故 $x_M = 0$, $\forall x \in I$. 但 $x \mapsto x_M$ 是从 $A(M)$ 到 A_M 上的单射, 我们只能有 $I = 0$. 因此 $A(M)$ 是极小非零理想.

最后, 由引理 (1.5.3) 知: $A(N) \neq 0$, $\forall N \in \mathscr{M}(A)$. 因为 $A = \bigoplus_{N\in\mathscr{M}(A)} A(N)$ 是有限维向量空间, 故 $\mathscr{M}(A)$ 只可能是一个有限集合. □

习 题

1. 设 V 是 F 代数 A 上的完全可约模. 证明 F 代数 A_V 是半单的.

2. 设 V 是 F 代数 A 上的不可约模. 证明 $|\mathscr{M}(A_V)| = 1$.

3. 设 L 与 L' 是 F 代数 A 的二个极小左理想. 则存在左 A 模同构 $L \cong L'$ 当且仅当存在某 $a' \in L'$ 使得 $L' = La'$. 并由此推出: $L \cong L'$ 当且仅当 $LL' = L'$.

§1.6 半单代数的判则

前面已弄清了半单代数及其正则模的结构, 但给定一个 F 代数, 如何判断它是否为半单代数? 本节将利用 Jacobson 根基的性质给出半单代数的一个判则.

设 S 是 F 代数 A 的子集. 记 $S^k=\{s_1s_2\cdots s_k|s_i\in S\}, k\in\mathbb{N}$. 如 N 是 A 的理想且存在 $k\in\mathbb{N}$ 使 $N^k=0$, 则称 N 为 A 的**幂零理想**. 同样可定义 A 的幂零左理想和幂零右理想.

(1.6.1) 引理 *F 代数 A 的每个非幂零左理想 I 含有非零幂等元.*

证 不妨设 I 是 A 的极小非幂零左理想. 因 $I^2\subseteq I$ 也是 A 的非幂零左理想, 故由 I 的极小性知: $I^2=I$. 在 I 中存在使 $IL\neq 0$ 的极小左理想 L. 于是存在 $x\in L$ 使 $Ix\neq 0$. 因 $Ix\subseteq L$ 且 Ix 为 I 中的左理想, $I(Ix)=Ix\neq 0$, 故由 L 的极小性知: $Ix=L$. 于是存在 $a\in I$ 使 $x=ax$. 这推出

$$x=ax=a^2x=\cdots.$$

I 含非幂零元 a 且 $(a^2-a)x=0$. 令

$$N=\{u\in I|ux=0\}\subset I.$$

因 $Ix=L\neq 0$, 故 N 是 I 的真左理想. 由 I 的极小性知: N 是幂零左理想, 置 $n_1=a^2-a\in N$, 如 $n_1=0$, 则 a 是 I 的非零幂等元. 如 $n_1\neq 0$,置

$$a_1=a+n_1-2an_1\in I,$$

则 a_1, a 与 n_1 可互相交换. 如果 a_1 是幂零元, 则 $a=a_1-n_1+2an_1$ 也是幂零元, 这引起矛盾. 故 a_1 是 I 的非幂零元. 显然,

$$a_1^2-a_1=4n_1^3-3n_1^2.$$

这推出: $n_2=a_1^2-a_1\in N$ 是幂零元, 含因子 n_1^2 且与 a_1 交换. 递归地, 我们能在 I 中构造非幂零元 $a_1,a_2,\cdots$ 使 $a_i^2-a_i$ 含因子 n_1^{2i}. 因 n_1 是幂零元, 故存在足够大的整数 i 使 $n_1^{2i}=0$. 此时 a_i 是所要求的幂等元. □

(1.6.2) 引理 *F 代数 A 的有限个幂零左理想的和是 A 的幂零左理想.*

证 只要证明任何二个幂零左理想的和是幂零左理想就行了. 设 N_1 与 N_2 是 A 的二个幂零左理想. 则和 N_1+N_2 也是 A 的左理想. 令 $N_1^q=N_2^r=0$, 则 $(N_1+N_2)^{q+r}$ 的元素是形如 $x_1x_2\cdots x_{q+r}$ 元素的有限和, 这里 $x_i\in N_1\bigcup N_2$. 显然, $x_1x_2\cdots x_{q+r}$ 中要么至少有 q 个因子属于 N_1, 要么至少有 r 个因子属于 N_2, 在前一种情形中, 写

$$x_1x_2\cdots x_{q+r}=(x_1\cdots x_{i_1})(x_{i_1+1}\cdots x_{i_2})\cdots(x_{i_{s-1}+1}\cdots x_{i_q})y,$$

这里 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_q}\in N_1$. 显然, $x_1x_2\cdots x_{q+r}\in N_1^q y=0$. 类似地可证在后一种情形中也有 $x_1x_2\cdots x_{q+r}=0$. 因此 $(N_1+N_2)^{q+r}=0$. □

由 F 代数 A 的维数的有限性知：如 I 是 A 的一些幂零理想的和 (允许有无限多个), 则在这些幂零理想的集合中必存在一个有限子集使 I 是这个子集中的幂零理想的和. 因此, 引理 (1.6.2) 在删去条件 "有限个" 后仍成立.

(1.6.3) 引理 *F 代数 A 的所有幂零左理想的和 N 是 A 的幂零理想. N 含 A 的所有幂零右理想. 商代数 A/N 不含非零的幂零理想.*

证 显然, N 是 A 的左理想. 如果 N 非幂零, 则由引理 (1.6.1) 知: N 含非零的幂等元 e, 但 e 属于某有限个幂零左理想的和. 由引理 (1.6.2) 知: e 是幂零元, 这引起矛盾, 故 N 是幂零左理想.

现考虑理想 NA. $\forall i \in \mathbb{N}$, 我们有

$$(NA)^i = N(AN)(AN)\cdots(AN)A \subset N^i A,$$

故 NA 是幂零理想. 特别, NA 是幂零左理想. 于是 $NA \subset N$. 因此, $N = NA$ 是 A 的理想.

如 J 是 A 的幂零右理想, 则 AJ 是幂零理想. 故 $J \subset AJ \subset N$.

最后, A/N 的每个左理想有形状 I/N, 这里 I 是 A 的含 N 的左理想.

I/N 在 A/N 中幂零 $\Leftrightarrow$ 存在某 $i \in \mathbb{N}$ 使 $I^i \subseteq N \Leftrightarrow I$ 是幂零的 $\Leftrightarrow I \subseteq N$.

于是 A/N 不含非零幂零左理想, 也就不含非零幂零理想. □

引理 (1.6.3) 中的幂零理想 N 称为 **F 代数 A 的 Jacobson 根基**, 或简称**根基**, 记作 Rad. A. 易见 Rad. A 是 A 中唯一的极大幂零理想. 现在可证明半单代数的如下判别准则了.

(1.6.4) 定理 *F 代数 A 是半单的 $\Leftrightarrow$ Rad. $A = 0$.*

证 ($\Longleftarrow$) 我们必须证明: 正则 A 模 ${}_AA$ 是 A 的非零极小左理想的直和. 令 L_1 为 A 的非零极小左理想. 由条件 Rad. $A = 0$ 知: L_1 是非幂零左理想. 据引理 (1.6.1), L_1 含非零幂等元 e. 因 $Ae \subseteq L_1$ 是 A 的非零左理想, 由 L_1 的极小性知: $L_1 = Ae$. 令 $L_1' = \{x \in A | xe = 0\}$. 因为每个 $x \in L_1'$ 可被写成 $x = x(1-e)$, 所以

$$L_1' = A(1-e),$$

且 L_1' 也是 A 的左理想. 我们有 $L_1 \bigcap L_1' = 0$. 因每个 $x \in A$ 可被写成

$$x = xe + x(1-e),$$

故 $A = L_1 \oplus L_1' = Ae \oplus A(1-e)$. 因此由定理 (1.4.5) 知: 正则 A 模 ${}_AA$ 完全可约, 亦即 A 半单.

($\Longrightarrow$) 据定理 (1.5.4), A 可被写成

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s,$$

这里 $s \geqslant 1, A_i$ 是 A 的极小非零理想. 令 $\pi_i : A \to A_i$ 为由上述分解所确定的射影, 即 $\pi_i(a) := a_i, \forall a = \sum_{i=1}^{s} a_i \in \bigoplus_i A_i = A$, 设 I 是 A 的幂零理想. 则 $\pi_i(I)$ 是 A_i 的幂零理想且 $I \subseteq \bigoplus_i \pi_i(I)$. 我们断言: $\pi_i(I) = 0, \forall i$. 这是因为: 不然的话, 则存在某 $j, 1 \leqslant j \leqslant s$, 使 $\pi_j(I) \neq 0$. 由 A_j 的极小性知: $\pi_j(I) = A_j$, 即 A_j 是 A 的幂零理想. 但由定理 (1.5.4) 知: A_j 含有非零幂等元, 这引起矛盾. 于是必有 $I = 0$, 这说明 A 中仅有的幂零理想是零, 即 Rad. $A = 0$. □

由定理 (1.5.4) (a) 与 (1.6.4) 可见: 任何 F 单代数是半单的.

习 题

1. 证明交换 F 代数 A 的根基 Rad. A 由 A 的所有幂零元素所组成.

2. 设 A 是 F 代数. 如 A 表示 ρ 满足条件 $\mathrm{Ker}\rho = 0$, 则称 ρ 为 A 的**忠实表示**. 如 A 有不可约的忠实表示, 则称 A 为**本原**的. 如 A 关于理想 I 的商代数 A/I 是本原 F 代数, 则称 I 为**本原**的. 证明 Rad. A 可用以下任何一种集合来刻画:

(a) A 的本原理想的交.

(b) A 的极大左理想的交.

(c) A 的极大右理想的交.

3. (McCrimmon) 证明 $z \in$ Rad. A 当且仅当 $\forall a \in A$, 存在 $w \in A$ 使得等式 $z + w = waz = zaw$ 成立.

4. 证明: A 模 M 完全可约当且仅当 (Rad. $A)M = 0$.

§1.7 半单代数的结构定理

据定理 (1.5.4) 知: 关于半单代数的研究可归结为关于单代数的研究. 本节将研究半单代数的单分支的结构. 为此, 我们要先介绍双重中心化子定理. 设 A 是 F 代数.

设 M 是 A 模. 令 $A' = \mathrm{End}_A M$ 与 $A'' = \mathrm{End}_{A'} M$. 显然, $A'' \supseteq A_M$. 注意如再定义 $A''' = \mathrm{End}_{A''} M$, 则 $A''' = A'$, 称 A'' 为 A_M 的**双重中心化子**. 当 $A'' = A_M$ 时, 称 A_M **有双重中心化子性质**.

(1.7.1) 定理 (稠密性定理) *设 M 是完全可约 A 模, 令 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 M 的有限子集. 则 $\forall a'' \in A''$, 总存在 $a \in A$ 使 $ax_i = a''x_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.*

由于 A 模 M 作为 F 空间是有限维的, 如在以上定理中取 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 M 的 F 基, 则可立刻推出:

(1.7.2) 定理 (双重中心化子定理) *设 M 是完全可约 A 模, 则 A_M 有双重中心化子性质. 特别, 当 A 是半单代数时, A_N 有双重中心化子性质, 这里 N*

是任何 A 模.

为了证明定理 (1.7.1), 我们需要两条引理.

(1.7.3) 引理 设 M 是完全可约 A 模, N 是 M 的 A 子模. 则 N 也是 M 的 A'' 子模.

证 由定理 (1.4.5) 知: 存在 M 的 A 子模 L 使 $M = N \oplus L$. 令 $p: M \to N$ 为由该分解所决定的射影, 则 $p \in A'$ 与 $N = p(M)$. 我们有

$$a''(N) = a''p(M) = p(a''(M)) \subset N, \quad \forall a'' \in A''.$$

因此 N 是 M 的 A'' 子模. □

(1.7.4) 引理 设 M 是 A 模. $M^{(n)}$ 是 n 个 M 的直和, $n = 1, 2, \cdots$.

(a) $\mathrm{End}_A M^{(n)}$ 是形如 $(u_1, \cdots, u_n) \mapsto (v_1, \cdots, v_n)$ 的映射的集合, 这里 $v_i = \sum\limits_j a'_{ij} u_j, a'_{ij} \in A'$.

(b) $\forall a'' \in A''$, 映射 $(u_1, \cdots, u_n) \mapsto (a''u_1, \cdots, a''u_n)$ 是 $\mathrm{End}_{A'} M^{(n)}$ 的元素.

证 (a) 设 $l \in \mathrm{End}_A M^{(n)}$. 考虑 l 对于元素 $(0, \cdots, 0, u_i, 0, \cdots, 0) \in M^{(n)}$ 的作用, 这里 u_i 是第 i 个支量, $1 \leqslant i \leqslant n$. 设 $l(0, \cdots, 0, u_i, 0, \cdots, 0) = (u_{1i}, \cdots, u_{ni})$, 则下列映射

$$u_i \mapsto (0, \cdots, 0, u_i, 0, \cdots, 0) \mapsto (u_{1i}, \cdots, u_{ni}) \mapsto u_{ji}$$

的合成 $a'_{ji}: u_i \mapsto u_{ji}$ 是 $\mathrm{End}_A M$ 的元素. 我们有:

$$l(u_1, \cdots, u_n) = \Big(\sum_i a'_{1i} u_i, \cdots, \sum_i a'_{ni} u_i\Big).$$

反之, 任何形如

$$(u_1, \cdots, u_n) \mapsto \Big(\sum_i a'_{1i} u_i, \cdots, \sum_i a'_{ni} u_i\Big), \quad a'_{ji} \in \mathrm{End}_A M$$

的映射属于 $\mathrm{End}_A M^{(n)}$, 这证明了 (a).

(b) $\forall a'' \in A''$, 映射

$$(u_1, \cdots, u_n) \mapsto (a''u_1, \cdots, a''u_n)$$

与

$$(u_1, \cdots, u_n) \mapsto \Big(\sum_i a'_{1i} u_i, \cdots, \sum_i a'_{ni} u_i\Big), \quad a'_{ji} \in A'$$

相交换, 因此 (b) 可由 (a) 推出. □

定理 (1.7.1) 的证明

先设 $n=1$, 记 $x=x_1$, 则 $N=Ax$ 是 M 的 A 子模. 由引理 (1.7.3) 知: N 是 M 的 A'' 子模, 因为 $x\in N$, 所以 $a''x\in N=Ax$. 于是存在 $a\in A$ 使 $ax=a''x$.

再设 n 是任意正整数. 由 M 的完全可约性可推出 $M^{(n)}$ 的完全可约性. 于是由引理 (1.7.4) 推出: $\forall a''\in A''$, 映射

$$(u_1,\cdots,u_n)\mapsto(a''u_1,\cdots,a''u_n)$$

属于 $\mathrm{End}_{A'}M^{(n)}$. 把 $M^{(n)}$ 看作当 $n=1$ 时的 M. 则由上面的讨论推知: 存在 $a\in A$ 使 $ax=(a''x_1,\cdots,a''x_n)$, 这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)$. □

给定二个 F 代数 A,B. 如果映射 $\varphi:A\to B$ 满足:

(a) $\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a),\forall a,b\in A$,

(b) $\varphi(1_A)=1_B$,

(c) φ 是 F 线性同构,

则称 φ 为 F **代数反同构**, 并称 B (或 A) F 代数反同构于 A (或 B), 记 $B=A^{\mathrm{op}}$ (或 $A=B^{\mathrm{op}}$).

设 A 是半单代数. $\forall N_i\in\mathscr{M}(A)$, 齐次分支 $A(N_i)$ 作为 A 模满足 $A(N_i)=N_i^{(n_i)}$, 这里 n_i 是 N_i 在正则 A 模 $_AA$ 中出现的重数. 记 $D_i'=\mathrm{End}_AN_i,D_i=(D_i')^{\mathrm{op}}$. 则由引理 (1.4.2) 知 D_i' 是可除环, 故 D_i 也是可除环. N_i 可被看作 D_i' 上右向量空间, 设其维数为 n_i'. 则由定理 (1.7.2) 推得: 存在 F 代数同构:

$$A_{N_i}\cong\mathrm{End}_{D_i'}N_i\cong M_{n_i'}(D_i).$$

上式右端是 D_i 上 $n_i'\times n_i'$ 全矩阵代数, 这里 $n_i'=\dim_{D_i'}N_i$. 然后, 定理 (1.5.4) (c) 告诉我们: 存在 F 代数同构 $A_{N_i}\cong A(N_i)$. 注意 $n_i'=n_i$. 因此由定理 (1.5.4) 推出:

(1.7.5) 定理 设 A 是域 F 上半单代数. 则存在 F 代数同构:

$$A\cong\bigoplus_{N_i\in\mathscr{M}(A)}M_{n_i}(D_i),$$
$$A(N_i)\cong M_{n_i}(D_i),$$

这里 n_i 是 N_i 在正则 A 模 $_AA$ 中出现的重数, $D_i=(\mathrm{End}_AN_i)^{\mathrm{op}}$.

(1.7.6) 推论 设 A 是代数闭域 F 上半单代数, M 为不可约 A 模, 则以下结论成立:

(a) $A_M=\mathrm{End}_FM$.

(b) $\dim A_M=\dim A(M)=(\dim M)^2$.

(c) $n_M({}_AA) = \dim M$.

(d) $\dim A = \sum_{M \in \mathscr{M}(A)} (\dim M)^2$.

(e) $\dim Z(A) = |\mathscr{M}(A)|$.

这里 $n_M({}_AA)$ 是 M 在正则模 ${}_AA$ 中出现的重数, $Z(A)$ 是 A 的中心,

证 (a) 由推论 (1.4.3) 知, $\mathrm{End}_A M = F1_M, \forall M \in \mathscr{M}(A)$. 故由定理 (1.7.2) 知: $A_M = \mathrm{End}_{F1_M} M = \mathrm{End}_F M$.

(b) 令 $d = \dim M$. 令 $M_d(F)$ 为 F 上 $d \times d$ 全矩阵代数. 则存在 F 代数同构 $\mathrm{End}_F M \cong M_d(F)$. 于是

$$\dim A_M = \dim \mathrm{End}_F M = d^2.$$

因此 (b) 可从 F 代数同构 $A(M) \cong A_M$ (见定理 (1.5.4)) 推得.

(c) 因为 $A(M)$ 是 $n_M({}_AA)$ 个 M 的直和, 所以

$$d^2 = \dim A(M) = n_M({}_AA)\dim M = d\, n_M({}_AA).$$

由此得: $n_M({}_AA) = \dim M$.

(d) 这可由 (b) 与定理 (1.5.4) 推得.

(e) 令 $Z^M = Z(A(M))$ 为 F 代数 $A(M)$ 的中心, 我们有

$$Z(A_M) = A_M \bigcap \mathrm{End}_A M = A_M \bigcap F1_M = F1_M.$$

则由定理 (1.5.4) 知: $\dim Z^M = \dim Z(A_M) = 1$.

故 $\dim\left(\bigoplus_{M \in \mathscr{M}(A)} Z^M\right) = |\mathscr{M}(A)|$. 因为不同的 $A(M)$ 相互零化, 我们有 $\bigoplus_{M \in \mathscr{M}(A)} Z^M = Z(A)$. 这证明了 (e). □

接着, 我们要证明 F 单代数的同构定理, 它是阿丁单环同构定理的特例, 为此, 我们需要如下引理.

(1.7.7) 引理 设 M 是 F 可除代数 D 上向量空间, $R = \mathrm{End}_D M$ 是 M 上 D 线性变换环. $\mathrm{End} M$ 是 M 上 F 线性变换代数. 则

(a) R 在 $\mathrm{End} M$ 内的中心化子是

$$Z = \{\delta' \in \mathrm{End} M | \exists \delta \in D 使得 \delta'(u) = \delta u, \forall u \in M\}.$$

(b) $\delta \mapsto \delta'$ 为从 D 到 Z 上的 F 代数同构.

证 因 M 是完全可约 D 模, 故 (a) 可从定理 (1.7.1) 推出. (b) 能被直接验证. □

由定理 (1.7.5) 与定理 (1.5.4)(a) 知: 任何 F 单代数同构于某矩阵代数 $M_n(D)$, 其中 D 是 F 可除代数. 下面我们要证明: 整数 n 与可除代数 D 被该单代数所唯一确定.

(1.7.8) 定理 (F 单代数的同构定理) *设 M_i 是 F 可除代数 D_i 上有限维空间, $i=1,2$. 设 g 是从 $R_1=\mathrm{End}_{D_1}M_1$ 到 $R_2=\mathrm{End}_{D_2}M_2$ 上的 F 代数同构, 则存在从 M_1 到 M_2 上的半线性同构 s 使*

$$g(a)=sas^{-1},\quad \forall a\in R_1.$$

注 设 σ 是从 D_1 到 D_2 上的 F 代数同构. 如映射 $s:M_1\to M_2$ 满足

$$s(x+y)=s(x)+s(y)$$

与
$$s(\delta x)=\sigma(\delta)s(x),\quad \forall x,y\in M_1,\quad \delta\in D_1,$$
则称 s 为 σ **半线性映射**, 或简称**半线性映射**. 此时, 如存在半线性映射 $t:M_2\to M_1$ 使 $st=1_{M_2}$ 与 $ts=1_{M_1}$, 则称 s 为**半线性同构**. 显然, 半线性映射 s 为半线性同构当且仅当 s 为双射.

定理 (1.7.8) 的证明

M_1 可被自然地看作 R_1 模, 而 M_2 也可被看作 R_1 模:

$$ay:=g(a)y,\quad \forall a\in R_1,\quad y\in M_2.$$

这两个 R_1 模都不可约. 由于 R_1 是 F 单代数, M_1 与 M_2 作为 R_1 模必须同构. 因此存在 F 线性同构 $s:M_1\to M_2$ 使得

$$s(ax)=as(x),\quad \forall x\in M_1,\quad a\in R_1.$$

因为 $ay=g(a)y, \forall y\in M_2$, 所以作为 M_2 上算子, 我们有等式 $sa=g(a)s$, 因此得到

$$g(a)=sas^{-1}.$$

设 $\mathrm{End}M_i$ 是 M_i 上 F 线性变换代数. 设 Z_i 是 $\mathrm{End}_{D_i}M_i$ 在 $\mathrm{End}M_i$ 内的中心化子. 因为 s 是从 M_1 到 M_2 上的 F 线性同构, 所以映射

$$\varphi:b\mapsto sbs^{-1},\quad \forall b\in \mathrm{End}M_1$$

是从 $\mathrm{End}M_1$ 到 $\mathrm{End}M_2$ 上的 F 代数同构. 由于 $\varphi(\mathrm{End}_{D_1}M_1)=\mathrm{End}_{D_2}M_2$, 限制映射 φ_{Z_1} 是从 Z_1 到 Z_2 上的 F 代数同构. 据引理 (1.7.7) 知: 映射

$$\psi_i:\delta_i\mapsto\delta_i',\quad \forall\delta_i\in D_i.$$

是从 D_i 到 Z_i 上的 F 代数同构, 这里 δ_i' 为 M_i 的 F 线性变换, 使

$$\delta_i'(u_i) = \delta_i u_i, \quad \forall u_i \in M_i.$$

于是我们得到 F 代数同构 $\sigma = \psi_2^{-1}\varphi\psi_1 : D_1 \to D_2$. 因此 $s\delta_1' s^{-1} = (\sigma\delta_1)'$, 且 $\forall x \in M_1$, 我们有

$$s(\delta_1 x) = s\delta_1' x = s\delta_1' s^{-1}(sx) = (\sigma\delta_1)'(sx) = (\sigma\delta_1)(sx).$$

这说明 s 是从 M_1 到 M_2 上的 σ 半线性同构. □

在定理 (1.7.8) 中, 设 $n_i = \dim_{D_i} M_i, D_i' = D_i^{\mathrm{op}}$, 则 $R_i \cong M_{n_i}(D_i')$. 于是定理 (1.7.8) 告诉我们: 如 $M_{n_1}(D_1') \cong M_{n_2}(D_2')$, 则 $D_1' \cong D_2'$ 与 $n_1 = n_2$. 因此我们有如下结论:

(1.7.9) 推论 *设 D_1 与 D_2 是两个 F 可除代数, 设存在 F 代数同构: $M_{n_1}(D_1) \cong M_{n_2}(D_2)$, 则 $n_1 = n_2$, 且存在 F 代数同构 $D_1 \cong D_2$.*

习 题

1. 证明: 任何 F 单代数的中心是域.

2. 证明: 如 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$, 这里 A_i 是 A 的单分支. 则 A 的中心 C 等于 $C_1 \oplus \cdots \oplus C_s$, 这里 $C_i = C \bigcap A_i$. 证明 C_i 是 A_i 的中心且 $A_i = AC_i$.

3. 设 A 是 F 代数. 记号 ${}_AM$ 表示 M 是一个左 A 模. 现设 $M = {}_AM$ 完全可约, $A' = \mathrm{End}_A M, A'' = \mathrm{End}_{A'} M$.

(a) 证明任何从 ${}_AM$ 的子模 ${}_AN$ 到 ${}_AM$ 内的同态能被扩充为 ${}_AM$ 的自同态, 此时如果 ${}_AN$ 是不可约的, 则任何从 ${}_AN$ 到 ${}_AM$ 内的非零同态能被扩充为 ${}_AM$ 的自同构.

(b) 证明如 $x \neq 0$ 是 ${}_AM$ 的不可约子模 ${}_AN$ 的元素, 则 $A'x$ 是 ${}_AM$ 的一个不可约子模.

提示 令 $y = a'x \neq 0, a' \in A'$. 考虑从 ${}_AN = Ax$ 到 ${}_AM$ 内的映射 $u \mapsto a'u$.

4. 设 A 是 F 代数. 如 $\forall 0 \neq a \in A$, 存在 A 的不可约表示 ρ 使得 $\rho(a) \neq 0$, 则称 A 为**半本原的**. 证明关于 A 的如下三个条件等价:

(a) A 是半本原的.

(b) A 有完全可约的忠实表示.

(c) A 是本原 F 代数的直积 (注: 关于本原 F 代数的定义, 见 §1.6 习题 2).

5. 证明:(a) F 代数 A 是本原的当且仅当 A 含有极大左理想 I 使得 I 不含 A 的任何非零理想. 并由此推出任何 F 单代数是本原的.

(b) F 代数 A 是半本原的当且仅当 $A \neq 0$ 且 $\bigcap_I (I : A) = 0$, 这里 $(I : A) := \{a \in A | aA \subset I\}$, I 取遍 A 的所有极大左理想.

提示 在 (b) 的证明中可利用如下事实: 设 I 是 A 的左理想, 则 $(I : A)$ 是 A 的含于 I 中的唯一极大理想.

6. 证明: 如 F 代数 A 是本原的, 则矩阵环 $M_n(A)$ 也是本原的.

7. 证明: F 代数 A 是半本原的当且仅当 $\mathrm{Rad}.A = 0$.

注 由此可见: 关于 F 代数的条件 "半本原" 与 "半单" 是等价的.

8. 设 R 是带 1 的环. 则可以像 (1.3.5) 那样对于一个加法群 V 定义 R 模结构.

(a) 证明以下条件等价:

(i) R 满足左理想的降链条件: 设 $\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n \supseteq \cdots$ 是环 R 中左理想的一个降链, 则一定存在某个正整数 N, 使得等式 $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n+1}$ 对于每个 $n \geqslant N$ 都成立.

(ii) R 作为左 R 模有有限长的子模链 $M_0 = R \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_r = \{0\}$ 使得 $M_{i-1}/M_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ 同构于某单 R 模.

(iii) 每个有限生成左 R 模有如 (ii) 中那种有限长的子模链.

称满足上述等价条件的环为**Artin 环**.

(b) 证明: 如果 R 是 Artin 环, 则其根基 Rad. R 为幂零理想, 其商环 $S = R/\mathrm{Rad}.R$ 是半单代数, 可分解成有限个单代数的乘积: $S = \prod_i S_i$, 其中每个 S_i 同构于一个除环 D_i 上的矩阵代数 $M_{n_i}(D_i)$, S_i 有唯一的单模 E_i, 它是 n_i 维 D_i^{op} 空间. 每个半单 R 模都被 $\mathrm{Rad}.R$ 所零化, 因此都可被看作为 S 模. 每个单 R 模都同构于某个 E_i.

(c) 证明: 域 F 上有限维代数是 Artin 环. 特别, 有限群 G 的群代数 $F[G]$ 是 Artin 环.

9. 设 R 是带 1 的环.

(a) 证明以下条件等价:

(i) R 满足左理想的升链条件: 设 $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subseteq \cdots$ 是环 R 中左理想的一个升链, 则一定存在某个正整数 N, 使得等式 $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n+1}$ 对于每个 $n \geqslant N$ 都成立.

(ii) R 中每个非空理想集合里必含极大元.

(iii) R 的每个理想都是有限生成的.

称满足上述等价条件的环为 **Neother 环**.

(b) 证明:Artin 环必为 Neother 环.

(c) Neother 环是否总为 Artin 环?

§1.8 F 代数上模的同态空间 $\mathrm{Hom}_A(L, M)$

设 A 是 F 代数. 我们在 (1.3.5) 中所定义的 A 模实质上是左 A 模. 我们可仿照 (1.3.5) 来定义右 A 模, 这只要把原来 A 对模的左作用改为右作用, 并对作用的合成作相应的改变就行了.

设 A、B 是二个 F 代数. 记号 ${}_AM$ (或 M_A) 表明 M 被当作左 (或右)A 模, ${}_AN_B$ 表明 N 是 (A, B) 双模, 即 N 既是左 A 模又是右 B 模, 且满足关系

$$a(xb) = (ax)b, \quad \forall a \in A, \quad b \in B, \quad x \in N.$$

给定模 ${}_AM$ 与 ${}_AN$, 记 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 为由所有从 M 到 N 内的左 A 模同态组成的集合, 则 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 关于如下定义的合成形成 F 空间: $\forall f, g \in$

$\mathrm{Hom}_A(M,M)$ 与 $a\in F$,

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),$$
$$(af)(x):=af(x),\quad \forall x\in M.$$

给定模 M_A 与 N_A, 我们也能定义由所有从 M 到 N 内的右 A 模同态组成的 F 空间, 在不致引起混淆的前提下, 我们仍用 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 来记这个空间.

给定模 ${}_AM$ 与 ${}_AN$, 令 $f\in\mathrm{Hom}_A(M,N)$. 则对于每个左 A 模 X, f 导出如下的 F 线性映射:

$$f^*:\mathrm{Hom}_A(N,X)\to\mathrm{Hom}_A(M,X),\qquad (1)$$
$$\alpha\mapsto\alpha f.$$
$$f_*:\mathrm{Hom}_A(X,M)\to\mathrm{Hom}_A(X,N),\qquad (2)$$
$$\alpha\mapsto f\alpha.$$

令 $L={}_AL$, 则 $\forall f\in\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 与 $g\in\mathrm{Hom}_A(N,L)$, 我们有: $(gf)^*=f^*g^*$ 与 $(gf)_*=g_*f_*$.

给定模 ${}_AL$ 与 ${}_AM_B$, 我们要在 $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ 上定义右 B 模结构. $\forall b\in B$, 存在 $b'\in\mathrm{Hom}_A(M,M)$ 使

$$b'(m)=mb,\quad \forall m\in M.$$

显然, $(bc)'=c'b', \forall b,c\in B$.

由 (2) 式知存在 F 线性映射

$$(b')_*:\mathrm{Hom}_A(L,M)\to\mathrm{Hom}_A(L,M).$$
$$\alpha\mapsto b'\alpha.$$

于是 $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ 在 B 的如下定义的作用下成为右 B 模:

$$\alpha\cdot b:=(b')_*\alpha,\ \forall b\in B\text{与}\alpha\in\mathrm{Hom}_A(L,M).$$

同样, 我们可在 $\mathrm{Hom}_A(M,L)$ 上定义左 B 模结构. 由 (1) 式知: $\forall b\in B$, 存在 F 线性映射

$$(b')^*:\mathrm{Hom}_A(M,L)\to\mathrm{Hom}_A(M,L).$$
$$\beta\mapsto\beta b'.$$

于是 $\mathrm{Hom}_A(M,L)$ 在 B 的如下定义的作用下成为左 B 模:

$$b\cdot\beta:=(b')^*\beta,\quad \forall b\in B\text{ 与 }\beta\in\mathrm{Hom}_A(M,L).$$

易知 F 代数 A 通过对自身的乘法作用而具有 (A,A) 双模结构. 故对于模 ${}_AM$, 我们有左 A 模 $\mathrm{Hom}_A(A,M)$. 易证映射 $f\mapsto f(1)$ 是从 $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ 到 M 上的左 A 模同构.

最后, 给定模 ${}_AL$, ${}_AM$ 与 ${}_AM'$, 我们有如下的左 A 模同构:

$$\mathrm{Hom}_A(M\oplus M',L)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_A(M,L)\oplus\mathrm{Hom}_A(M',L)$$
$$f\mapsto f_M+f_{M'},$$

这里 f_M (或 $f_{M'}$) 是 f 在直和项 M (或 M') 上的限制, 我们也有右 A 模同构:

$$\mathrm{Hom}_A(L,M\oplus M')\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_A(L,M)\oplus\mathrm{Hom}_A(L,M')$$
$$f\mapsto p_Mf+p_{M'}f,$$

这里映射 p_M (或 $p_{M'}$) 为从 $M\oplus M'$ 到 M (或 M') 上的射影.

习　题

1. 设 A 是 F 代数, M 是左 A 模、证明存在左 A 模同构:

$$\mathrm{Hom}_A(A,M)\cong M.$$

2. 给定一个 A 模与 A 模同态的序列

$$M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\longrightarrow\cdots\xrightarrow{f_{n-1}}M_n\ (\text{称之为 } \boldsymbol{A}\ \textbf{序列}),$$

称该**序列在** M_i **处正合**, 如 $\mathrm{Ker}\,f_i=\mathrm{Im}f_{i-1}$. 称该**序列正合**, 如它在每个 $M_i(2\leqslant i\leqslant n-1)$ 处正合, 证明 A 序列

$$O\longrightarrow L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\longrightarrow O\tag{3}$$

是正合的当且仅当 f 是单射, g 是满射且 $\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}\,g$. 当上述等价条件成立时, 称序列 (3) 为**短正合列**. 此时如 $f(L)$ 是 M 的直和项, 则称序列 (3) 为**分裂的**. 证明关于短正合列 (3) 的以下三个条件等价:

(a) 序列 (3) 是分裂的.

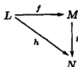
(b) 存在 $h\in\mathrm{Hom}_A(M,L)$ 使得 hf 是 L 的自同构.

(c) 存在 $h'\in\mathrm{Hom}_A(N,M)$ 使得 gh' 是 N 的自同构.

3. 称 A 模同态图

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{f_1} & L_2\\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ M_1 & \xrightarrow{g_2} & M_2\end{array}$$

交换, 如果 $f_2f_1=g_2g_1$. 同样, 称下图交换, 如果 $gf=h$. 试用交换图的语言叙述本节 (1) 式与 (2) 式中关于 F 线性映射 f^* 与 f_* 的定义.



4. 证明: (a) 设 X 是 A 模, $O \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是 A 正合序列. 则加法群序列: $O \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(X,N)$ 也是正合的.

(b) 设 Y 是 A 模, $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow O$ 是 A 正合序列, 则加法群序列: $O \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(L,Y)$ 也是正合的.

5. 设以下是 A 模同态的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow O \\ & & \downarrow{\alpha} & & \downarrow{\beta} & & \downarrow{\gamma} & \\ O & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \end{array}$$

其中上下两行都正合. 证明**蛇形引理**: 存在 A 正合序列:

$$\mathrm{Ker}\ \alpha \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \beta \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \gamma \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ \alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \gamma,$$

这里前二个箭头分别是 f,g 的限制映射, 后二个箭头是由 f',g' 分别导出的映射, 而 δ 满足 $\delta(c) = a' + \mathrm{Im}\ \alpha$, 其中 $f'(a') = b' = \beta(b)$ 和 $g(b) = c$.

6. 称左 A 模 P 是**射影模**, 如果对于每个左 A 模满同态 $f: E \to E'$ 和左 A 模同态 $g': P \to E'$, 存在左 A 模同态 $g: P \to E$ 使得 $g' = f \cdot g$. 称左 A 模 P 是**自由的**, 如果存在某 $n > 0$ 使得 $P \cong A^n$.

证明: 关于左 A 模 P 的以下条件等价:

(a) P 是射影左 A 模.

(b) P 是某自由左 A 模的直和项.

(c) 每个左 A 模的短正合列 $O \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow O$ 分裂.

7. F 代数 A 的一个左理想 $\mathfrak{p}$ 作为左 A 模是 A 的一个直和项当且仅当 A 中存在满足条件 $e^2 = e$ 和 $\mathfrak{p} = Ae$ 的元素 e.

8. 左 A 模 I 是**内射模**, 如果对于每个左 A 模单同态 $j: M \to N$ 和左 A 模同态: $\eta: M \to I$, 存在左 A 模同态 $\phi: N \to I$ 使得 $\phi \cdot j = \eta$.

证明: 关于左 A 模 I 的以下条件等价:

(a) I 是内射左 A 模.

(b) I 是任何含 I 为其子模的左 A 模的直和项.

(c) 每个左 A 模的短正合列 $O \longrightarrow I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow O$ 分裂.

9. 左 A 模 M 的**射影包**是指满足以下条件的射影左 A 模 P_M:

(a) P_M 有同构于 M 的商模.

(b) 如果射影左 A 模 P' 有同构于 M 的商模, 则 P_M 同构于 P' 的直和项.

称左 A 模同态 $\eta: M \to N$ 为**本质满的**, 如果 η 是满的, 且对于 M 的任何真子模 M', 有 $\eta(M') \subsetneq N$. 设 P 是射影左 A 模. 证明: P 是左 A 模 M 的射影包当且仅当存在从 P 到 M 上的本质满同态.

10. 左 A 模 M 的**内射包**是指满足以下条件的内射左 A 模 I_M:

(a) I_M 含同构于 M 的子模.

(b) 如果内射左 A 模 I' 含同构于 M 的子模, 则 I_M 同构于 I' 的直和项.

称左 A 模同态 $\eta: M \to N$ 为**本质单的**, 如果 η 是单射, 且对于任何左 A 模同态 $\tau: N \to L$, 由 $\tau\eta$ 是单射可推出 τ 也是单射.

设 I 是内射左 A 模. 证明: I 是左 A 模 M 的内射包当且仅当存在从 M 到 I 上的本质单同态.

§1.9　F 代数上模的张量积

设 A 是 F 代数. 给定模 L_A 与 ${}_AM$, 令 $\mathscr{F}$ 为笛卡儿积 $L \times M$ 中以所有有序对 $\{(l,m)|l \in L, m \in M\}$ 为基的 F 空间. 令 $\mathscr{F}_0$ 为 $\mathscr{F}$ 的子空间, 它由所有下列形状的元素生成:

$$\begin{gathered}(l+l',m)-(l,m)-(l',m),\\(l,m+m')-(l,m)-(l,m'),\\(l,am)-(la,m),\end{gathered}$$

这里 $l,l' \in L, m,m' \in M$ 与 $a \in A$. 定义 $L \otimes {}_AM := \mathscr{F}/\mathscr{F}_0$. 这是一个 F 空间, 称之为模 L_A 与 ${}_AM$ 在 A 上的**张量积空间**. 其元素都可表为有限和 $\sum\limits_i (l_i \otimes m_i)$, 这里 $l_i \in L, m_i \in M, l_i \otimes m_i \in L \otimes {}_AM$ 为 $(l_i,m_i) \in \mathscr{F}$ 在自然映射下的像. 注意 $L \otimes {}_AM$ 的元素的这种表达形式不唯一.

今后我们要经常讨论 F 线性映射 $f': L \otimes {}_AM \to P$, 这里 P 是 F 空间. 显然, 一旦像 $\{f'(l \otimes m)|l \in L, m \in M\}$ 被确定后, 映射 f' 就完全确定了. 但问题是要验证这样构造出来的映射是否有意义, 即要验证该映射是否与 $L \otimes {}_AM$ 里元素的表达形式有关, 为此, 我们必须以某种普遍性质去刻画 $L \otimes {}_AM$.

给定模 L_A, ${}_AM$ 与 F 空间 P. 考虑 F 线性映射 $f: L \times M \to P$, 称 f 为 A **平衡映射**, 如下列等式成立:

$$\begin{gathered}f(l+l',m)=f(l,m)+f(l',m),\\f(l,m+m')=f(l,m)+f(l,m'),\\f(l,am)=f(la,m),\end{gathered}$$

这里 $l,l' \in L, m,m' \in M$ 与 $a \in A$. 我们有以下结果.

(1.9.1) 命题 对于模 L_A, ${}_AM$ 与任何 F 空间 P, 每个 A 平衡映射 $f: L \times M \to P$ 确定唯一的 F 线性映射 $f': L \otimes {}_AM \to P$, 它满足: $f'(l \otimes m) = f(l, m), \forall l \in L, m \in M$. $L \otimes {}_AM$ 在同构的意义上被以上性质所完全确定.

由该命题可推出:

(1.9.2) 定理 设 $f: M \to M'$ 与 $g: N \to N'$ 是 A 模同态, 这里 M 与 M' 是右 A 模, N 与 N' 是左 A 模. 则存在唯一的 F 线性映射 $f \otimes g: M \otimes {}_AN \to M' \otimes {}_AN'$ 使得

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

如 $f': M' \to M''$ 是右 A 模同态, $g': N' \to N''$ 是左 A 模同态, 则 $(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g$.

证 由于 $(m, n) \to f(m) \otimes g(n)$ 是从 $M \times N$ 到 $M' \otimes {}_AN'$ 内的 A 平衡映射, 由命题 (1.9.1) 知存在唯一的 F 线性映射 $f \otimes g: M \otimes {}_AN \to M' \otimes {}_AN'$ 使得 $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$. 定理的后半部分可直接推出. □

设 M_1 是右 A 模 M 的子模, N 是左 A 模. 则我们得到二个 F 空间 $M \otimes {}_AN$ 与 $M_1 \otimes {}_AN$. 一般来讲, $M_1 \otimes {}_AN$ 不能被看作为 $M \otimes {}_AN$ 的子集. 这可从以下例子中看出: 置 $M = \mathbb{Q}, M_1 = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 它们都是 $\mathbb{Z}$ 模. 但 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = 0, M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong N$ (见定理 (1.9.4)), 由此可见下面的定理是有意义的.

(1.9.3) 定理 设右 A 模 M 是其子模 M_1 与 M_2 的直和, N 是左 A 模. 则 $M \otimes {}_AN \cong M_1 \otimes {}_AN \oplus M_2 \otimes {}_AN$.

证 设 $\pi_i: M \to M_i$ 是由分解式 $M = M_1 \oplus M_2$ 所决定的射影, $i = 1, 2$. 置 $\theta_i = \pi_i \otimes 1$ 则由定理 (1.9.2) 知: $1 = \theta_1 + \theta_2, \theta_i^2 = \theta_i, \theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1 = 0$. 令 $T_i = \theta_i(M \otimes {}_AN)$. 我们有 $M \otimes {}_AN = T_1 \oplus T_2$. 余下只要证 $T_i \cong M_i \otimes {}_AN$. 不妨设 $i = 1$. 我们只要证 T_1 满足命题 (1.9.1) 所指出的普遍性质.

定义映射 $t: M \times N \to M \otimes {}_AN$ 使得 $(m, n) \mapsto m \otimes n$. 因 $M_1 \times N \subset M \times N$, 可令 $\varphi = t|_{M_1 \times N}$ 使

$$\varphi(m_1, n) = t(m_1, n), \quad \forall m_1 \in M_1, \quad n \in N.$$

由等式 $M_1 = \pi_1 M$ 与 T_1 的定义知 $M_1 \times N$ 在 φ 作用下的像生成 T_1.

今令 P 为任何 F 空间, 令 $g: M_1 \times N \to P$ 为 A 平衡映射, 则下图给出从 $M \times N$ 到 P 内的 A 平衡映射:

$$\begin{array}{ccccc} & & M\otimes_A N & & \\ & \overset{t}{\nearrow} & & \overset{g^*}{\searrow} & \\ M\times N & \xrightarrow[\pi_1\times 1]{} & M_1\times N & \xrightarrow[g]{} & P \end{array}$$

故存在 F 线性映射 $g^*: M\otimes {}_AN\to P$ 使上图交换. 令 $g_1=g^*|_{T_1}$. 则 g_1 是从 T_1 到 P 内的 F 线性映射. 为完成证明. 只需证等式 $g_1\varphi=g$ 在 $M_1\times N$ 上成立. 但 $\forall m_1\in M_1, n\in N$, 我们有 $g_1\varphi(m_1,n)=g_1t(m_1,n)=g^*t(m_1,n)=g(\pi_1\times 1)(m_1,n)=g(\pi_1m_1,n)=g(m_1,n)$. □

以上定理可推广到 M 或 N 是其有限个子模的直和的情形.

接着要证: 如 A,B 是二个 F 代数, M 是 (B,A) 双模, N 是左 A 模, 则 $M\otimes {}_AN$ 有左 B 模结构. 令 $s\in B$. 则映射 $(m,n)\mapsto sm\otimes n$ 是从 $M\times N$ 到 $M\otimes {}_AN$ 内的 A 平衡映射. 据命题 (1.9.1) 知, 存在 $M\otimes {}_AN$ 的 F 自同态 ψ_s, 使得 $\psi_s(m\otimes n)=sm\otimes n$. 令 $\forall s\in B$, 定义: $s(\sum m_i\otimes n_i)=\psi_s(\sum m_i\otimes n_i)=\sum sm_i\otimes n_i$. 则 $M\otimes {}_AN$ 成为一个左 B 模.

注 (a) 以上定义 $M\otimes {}_AN$ 上左 B 模结构的过程看起来似不够直截了当. 似乎可直接定义: $s(\sum m_i\otimes n_i)=\sum sm_i\otimes n_i$. 但因 $M\otimes {}_AN$ 中元素的表达式不唯一, 故必须证明后一种定义是有意义的, 这一点做起来比较困难, 而上面利用从 $M\times N$ 到 $M\otimes {}_AN$ 内的 A 平衡映射来定义 $M\otimes {}_AN$ 的左 B 模结构的方法避免了这一困难.

(b) 如在定理 (1.9.3) 中的 M, M_1 与 M_2 都是 (B,A) 双模, 则可证 $M\otimes {}_AN$ 与 $M_1\otimes {}_AN\oplus M_2\otimes {}_AN$ 是同构的左 B 模.

把 F 代数 A 看作 (A,A) 双模. 则对于任何左 A 模 N, $A\otimes {}_AN$ 是左 A 模.

(1.9.4) 定理 *$A\otimes {}_AN$ 与 N 是同构的左 A 模.*

证 $(r,n)\mapsto rn$ 是从 $A\times N$ 到 N 内的 A 平衡映射. 故由命题 (1.9.1) 知, 存在 F 线性同态 $\varphi: A\otimes {}_AN\to N$ 使得 $\varphi(r\otimes n)=rn$. 另一方面可定义 F 线性映射 $\psi: N\to A\otimes {}_AN$ 为 $\psi(n)=1\otimes n$, $\forall n\in N$. 显然 $\varphi\psi$ 是 N 上恒等映射, 且 $\psi\varphi(r\otimes n)=\psi(rn)=1\otimes rn=r\otimes n$. 故 $\psi\varphi$ 是 $A\otimes {}_AN$ 上恒等映射. 因而 φ 是 F 线性同构. 易证 φ 也是左 A 模同构. □

定理 (1.9.4) 与下面的定理在模的张量积理论上都是最基本的.

(1.9.5) 定理 *设 A,B 是 F 代数. 对于模 L_A, ${}_AM_B$ 与 ${}_BN$, 存在 F 线性同构:*

$$(L\otimes {}_AM)\otimes {}_BN\cong L\otimes {}_A(M\otimes {}_BN).$$

证 由命题 (1.9.1) 导出 F 线性映射

$$\lambda: (l\otimes m)\otimes n \mapsto l\otimes(m\otimes n),$$
$$\mu: l\otimes(m\otimes n)\mapsto (l\otimes m)\otimes n,$$

使得 $\lambda\mu=1, \mu\lambda=1$. 证明的细节留给读者作为练习. □

本节的余下部分将讨论以后要遇到的关于张量积的一些特殊情形.

(I) 向量空间的张量积

设 M 与 N 是 F 空间. 则 $M\otimes_F N$ 是 F 空间. 由定理 (1.9.3) 与 (1.9.4) 知, 存在 F 线性同构

$$M\otimes_F N\cong F^{(r)}\otimes_F N\cong (F\otimes_F N)^{(r)}\cong N^{(r)},$$

这里 $X^{(r)}$ 表示 r 个 X 的直和, $r=\dim_F M$. 这推出

$$\dim_F(M\otimes_F N)=(\dim_F M)(\dim_F N).$$

现设 $(m_1,\cdots,m_r)$ 与 $(n_1,\cdots,n_s)$ 分别是 M 与 N 的 F 基. 易证 $D=(m_1\otimes n_1, m_1\otimes n_2,\cdots,m_1\otimes n_s, m_2\otimes n_1,\cdots,m_2\otimes n_s,\cdots,m_r\otimes n_1,\cdots,m_r\otimes n_s)$ 在 F 上生成 $M\otimes_F N$. 故 D 形成 $M\otimes_F N$ 的一组 F 基.

设 $T: M_1\to M_1'$ 与 $U: M_2\to M_2'$ 是 F 线性映射, 这里 $M_i, M_i', i=1,2$, 都是 F 空间, 则映射 $T\otimes U$ 是从 $M_1\otimes_F M_2$ 到 $M_1'\otimes_F M_2'$ 内的 F 线性映射. 特别, 令 $T\in \mathrm{End}_F M$ 与 $U\in\mathrm{End}_F N$. 则 $T\otimes U\in\mathrm{End}_F(M\otimes_F N)$. 令

$$Tm_i=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}m_j,$$
$$Un_i=\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}n_j.$$

则 $\mathbf{T}=(\alpha_{ij})$ 与 $\mathbf{U}=(\beta_{ij})$ 分别是 T 与 U 关于基 $(m_1,\cdots,m_r)$ 与 $(n_1,\cdots,n_s)$ 的矩阵. $\forall i,j$, 我们有

$$(T\otimes U)(m_i\otimes n_j)=Tm_i\otimes Un_j=\sum_{l=1}^{r}\alpha_{il}m_l\otimes\sum_{k=1}^{s}\beta_{jk}n_k$$
$$=\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{il}\beta_{jk}(m_l\otimes n_k).$$

由此可见 $T\otimes U$ 关于基 D 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\mathbf{U} & \alpha_{12}\mathbf{U} & \cdots & \alpha_{1r}\mathbf{U} \\ \alpha_{21}\mathbf{U} & \alpha_{22}\mathbf{U} & \cdots & \alpha_{2r}\mathbf{U} \\ & \cdots\cdots & & \\ \alpha_{r1}\mathbf{U} & \alpha_{r1}\mathbf{U} & \cdots & \alpha_{rr}\mathbf{U} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

称该矩阵为**矩阵 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{U}$ 的张量积**, 记作 $\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{U}$.

(1.9.6) 定理　*设 M 与 N 是 F 空间. 则存在 F 线性同构:*

$$\mathrm{End}_F(M\otimes_F N)\cong \mathrm{End}_F M\otimes_F \mathrm{End}_F N.$$

证　设 $(m_1,\cdots,m_r)$ 与 $(n_1,\cdots,n_s)$ 分别是 M 与 N 的 F 基. 分别定义 $E_{ij}\in\mathrm{End}_F M$ 与 $F_{ij}\in\mathrm{End}_F N$ 为

$$E_{ij}m_k=\delta_{jk}m_i,$$
$$F_{ij}n_k=\delta_{jk}n_i.$$

则由于 $\{m_i\otimes n_j|1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant s\}$ 是 $M\otimes_F N$ 的 F 基, 这推出 $\mathscr{E}=\{E_{ij}\otimes F_{kl}|1\leqslant i,j\leqslant r,1\leqslant k,l\leqslant s\}$ 是 F 线性无关映射的集合, 因为 $|\mathscr{E}|=r^2s^2=\dim_F(\mathrm{End}_F(M\otimes_F N))$, 所以 $\mathscr{E}$ 是 $\mathrm{End}_F(M\otimes_F N)$ 的 F 基. 于是 $\mathrm{End}_F(M\otimes_F N)$ 的元素都有形状 $\sum\limits_i T_i\otimes U_i$, 其中 $T_i\in\mathrm{End}_F M$ 与 $U_i\in\mathrm{End}_F N$. 最后通过比较定理中式子两边的 F 维数即得所要证明的结果. □

对于 n 维 F 空间 M, 我们有 F 线性同构 $M_n(F)\cong\mathrm{End}_F M$. 故上述定理告诉我们: 存在 F 线性同构

$$M_r(F)\otimes_F M_s(F)\cong M_{rs}(F). \tag{2}$$

(Ⅱ) 向量空间的基域扩充

设 V 是以 $(v_1,\cdots,v_r)$ 为基的 F 空间, L 是 F 的扩域, 则 $L\otimes_F V\cong L\otimes_F F^{(r)}\cong(L\otimes_F F)^{(r)}\cong L^{(r)}$, 即 $L\otimes_F V$ 是 r 维 L 空间. 易见 $1\otimes v_1,\cdots,1\otimes v_r$ 形成 $L\otimes_F V$ 的一组 L 基. 写 $V^L:=L\otimes_F V$, 则映射 $v\mapsto 1\otimes v$ 给出从 V 到 V^L 内的 F 线性单射, 故 V 可被看作 V^L 的 F 子空间, 而 V^L 被看作 V 通过基域扩充所得到的向量空间.

现设 A 是 F 代数, 则易证 A^L 在如下定义的乘法下成为 L 代数: $\forall\lambda_i,\mu_j\in L,a_i,b_j\in A$,

$$\left(\sum\lambda_i a_i\right)\left(\sum\mu_j b_j\right)=\sum\lambda_i\mu_j a_i b_j$$

(我们省略符号 $\otimes$ 是由于我们把 A 嵌入 A^L). 如 M 是 A 模, 则 M 也是 F 空间. M^L 在如下定义的作用下成为 A^L 模:

$$\left(\sum \lambda_i a_i\right)\left(\sum \mu_j m_j\right) = \sum \lambda_i \mu_j (a_i m_j), \quad \forall \lambda_i, \mu_j \in L, a_i \in A, m_j \in M.$$

(III) F 代数的张量积

设 A 与 B 是分别以 1 与 $1'$ 为恒等元的 F 代数, 则 $A \otimes_F B$ 首先可被看作 F 空间. 我们要证明如下定义的乘法是有意义的:

$$\left(\sum a_i \otimes a_i'\right)\left(\sum b_j \otimes b_j'\right) = \sum a_i b_j \otimes a_i' b_j', \tag{3}$$

这里 $a_i, b_j \in A$, $a_i', b_j' \in B$, 且 $A \otimes_F B$ 在该乘法下成为 F 代数. 这只要证明: 如 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes a_i' = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{a}_i \otimes \overline{a}_i'$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes a_i'\right)\left(\sum b_j \otimes b_j'\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \otimes \overline{a}_i'\right)\left(\sum b_j \otimes b_j'\right).$$

为此, 只要证明: 如 $\sum a_i \otimes a_i' = 0$, 则

$$\left(\sum a_i \otimes a_i'\right)\left(\sum b_j \otimes b_j'\right) = 0.$$

令 $(e_1, \cdots, e_r)$ 与 $(e_1', \cdots, e_s')$ 分别为 A 与 B 的 F 基. 则

$$a_i = \sum \alpha_{ik} e_k, \quad a_i' = \sum \alpha_{il}' e_l', \quad \alpha_{ik}, \quad \alpha_{il}' \in F,$$
$$\sum a_i \otimes a_i' = \sum_{i,k,l} \alpha_{ik} \alpha_{il}' e_k \otimes e_l' = 0.$$

由于 $\{e_k \otimes e_l' | 1 \leqslant k \leqslant r, 1 \leqslant l \leqslant s\}$ 是 $A \otimes_F B$ 的一组 F 基, 我们有 $\sum\limits_i \alpha_{ik}\alpha_{il}' = 0, \forall k, l$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_i b_j \otimes a_i' b_j' &= \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ik}\alpha_{il}' e_k b_j \otimes e_l' b_j' \\ &= \sum_{k,l,j}\left(\sum_i \alpha_{ik}\alpha_{il}'\right) e_k b_j \otimes e_l' b_j' = 0.\end{aligned}$$

这证明了我们的断言. 既然 (3) 式中定义的乘法有意义, $A \otimes_F B$ 就成为 F 代数. 子集 $A \otimes 1'$ 与 $1 \otimes B$ 是 $A \otimes_F B$ 的分别同构于 A 与 B 的 F 子代数, $A \otimes 1'$ 的元素与 $1 \otimes B$ 的元素关于乘法互相交换, 它们的积在 F 上生成了 $A \otimes_F B$, 且 $\dim_F(A \otimes_F B) = (\dim_F A)(\dim_F B)$. 下面我们将证明: F 代数 $A \otimes B$ 在同构的意义下被这些性质唯一决定.

(1.9.7) 定理 设 F 代数 D 中存在分别同构于 A,B 的子代数 D_1,D_2, 且满足:

(a) $\forall d_i \in D_i, i=1,2$, 等式 $d_1d_2=d_2d_1$ 成立.

(b) $D=D_1D_2$, 且 $\dim D=\dim A\cdot\dim B$.

则存在 F 代数同构: $D\cong A\otimes B$.

证 因为 $(a,b)\mapsto ab$ 是从 $A\times B$ 到 D 内的 F 平衡映射, 这里我们将 A,B 分别等同于 D 的子代数 D_1,D_2, 故存在 F 线性映射 $\varphi: A\otimes B\to D$ 使得 $\varphi(a\otimes b)=ab, \forall a\in A, b\in B$. 由 (a) 可知 φ 是 F 代数同态. 又由 (b) 可知 φ 是双射. 故 φ 是 F 代数同构. □

对于 F 代数 A,B, 我们也能定义张量积 $B\otimes A$ 的 F 代数结构, 且显然 $b\otimes a\mapsto a\otimes b$, $\forall a\in A, b\in B$, 是从 $B\otimes A$ 到 $A\otimes B$ 上的 F 代数同构, 故我们能把 F 代数 $B\otimes A$ 与 $A\otimes B$ 等同起来, 称之为 ***F* 代数 *A* 与 *B* 的张量积**.

定理 (1.9.7) 有以下推论.

(1.9.8) 推论 设 B 是 F 代数. 则 $M_n(B)\cong M_n(F)\otimes_F B$.

证 令 $D=M_n(B), D_1=M_n(F)$ 与 $D_2=B\mathbf{1}=\{b\mathbf{1}|b\in B\}$, 这里

$$b\mathbf{1}=\begin{pmatrix} b & & & 0\\ & b & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b\end{pmatrix}.$$

则结论可从定理 (1.9.7) 推得. □

现设 $A'=B\otimes A$ 是 F 代数 A 与 B 的张量积.

令 M 与 N 为二个左 A 模. 置 $M'=B\otimes M$ 与 $N'=B\otimes N$. 则 M' (或 N') 有左 A' 模结构

$$(b\otimes a)(b'\otimes m):=bb'\otimes am,\quad \forall b,b'\in B, a\in A, m\in M\ \ (\text{或} m\in N),$$

且存在 F 线性同态 α:

$$B\otimes \mathrm{Hom}_A(M,N)\to \mathrm{Hom}_{A'}(M',N') \tag{4}$$
$$b\otimes f\mapsto b_r\otimes f,$$

这里映射 $b_r: B\to B$ 定义为 $b_rb'=b'b$, $\forall b'\in B$. 于是, $\forall b'\in B, m\in M'$, 有 $(b_r\otimes f)(b'\otimes m)=(b_rb')\otimes f(m)=(b'b)\otimes f(m)\in N'$.

定义 B 对 M' 的右作用为

$$(b'\otimes m)b := b'b\otimes m, \quad \forall b, b'\in B, m\in M,$$

则 M' 成为 (A', B) 双模. 因此 (4) 式两边都有左 B 模结构, 另外, 由于 N' 有 (A', B) 双模结构, (4) 式两边也都有右 B 模结构, 易证 (4) 式中的映射 α 是 (B, B) 双模同态.

最后, 我们再给出一个今后要用到的结果. 给定模 ${}_AL$, ${}_BM_A$ 与 ${}_BN$, 由上一节知, $\mathrm{Hom}_B(M,N)$ 有左 A 模结构. 故可定义 F 空间 $\mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M,N))$. 同理, 利用 $M\otimes {}_AL$ 的左 B 模结构, 可定义 F 空间 $\mathrm{Hom}_B(M\otimes {}_AL, N)$. 可证明存在 F 空间的自然同构

$$\tau : \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M,N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(M\otimes {}_AL, N) \tag{5}$$

使 $(\tau f)(m\otimes l) = f_l(m)$, $\forall m\in M, l\in L$, 这里 $f\in \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M,N))$ 与 $f_l = f(l)$.

习　题

设 M 与 N 是二个 F 空间.

1. 令 $v_1, \cdots, v_r$ 为 M 的基. 设 $T\in \mathrm{End}_F M$ 满足

$$Tv_i = \sum_j \alpha_{ij} v_j, \quad \forall i,$$

这里 $\alpha_{ij}\in F$. 定义 T 的迹 tr. T 为 $\sum_i \alpha_{ii}$. 由线性代数理论知 tr. T 只依赖于 T, 而与 M 的基的选取无关, 令 $U\in \mathrm{End}_F N$. 证明等式 $\mathrm{tr.}\,(T\otimes U) = (\mathrm{tr.}T)(\mathrm{tr.}U)$ 成立.

2. 设 $m_1, \cdots, m_r$ 是 M 的线性无关元素. 设 $n_1, \cdots, n_r\in N$ 满足 $\sum_i m_i\otimes n_i = 0$. 证明: $n_1 = \cdots = n_r = 0$.

3. 设 $M\circ N$ 是 F 空间, 使得存在从 $M\times N$ 到 $M\circ N$ 内的满足以下条件的双线性映射 $(m,n)\mapsto m\circ n$: 如 $m_1, \cdots, m_r$ 是 M 的线性无关元素, 又如 $n_1, \cdots, n_r\in N$ 满足等式 $\sum_i m_i\circ n_i = 0$, 则 $n_1 = \cdots = n_r = 0$. 证明: $M\circ N\cong M\otimes_F N$.

4. 设 M^* 是 M 的对偶空间, 即 M^* 是 M 上 F 值线性函数集合. $\forall \psi\in M^*, n\in N$, 定义从 M 到 N 内的映射 $\psi\circ n$ 如下:

$$(\psi\circ n)(u) = \psi(u)n, \quad \forall u\in M.$$

证明 $\psi\circ n\in \mathrm{Hom}_F(M,N)$. 并证明 $(\psi, n)\mapsto \psi\circ n$ 是从 $M^*\times N$ 到 $\mathrm{Hom}_F(M,N)$ 内的双线性映射, 且 $\mathrm{Hom}_F(M,N)$ 作为 F 空间由元素集合 $\{\psi\circ n | \psi\in M^*, n\in N\}$ 所生成. 最后证明存在 F 线性同构 $\mathrm{Hom}_F(M,N)\cong M^*\otimes_F N$.

5. 证明定理 (1.9.6) 与 §1.9(2) 式中的 F 线性同构也是 F 代数同构.

6. 设 A 是 F 代数, P 是射影左 A 模, E 是左 A 模. 定义 A 对张量积 $P \otimes_F E$ 的作用如下:

$$a \cdot (x \otimes y) := ax \otimes ay, \quad \forall a \in A, x \in P, y \in E.$$

证明: $P \otimes_F E$ 是射影左 A 模.

§1.10 F 上中心单代数及其分裂域

本节内容与今后要研究的群表示理论有着十分密切的关系.

(1.10.1) 定义 如 F 代数 A 的中心等于 F, 则称 A 为 F **上中心代数**, 或简称**中心代数**. 显然, 全矩阵代数 $M_n(F)$ 是 F 上中心单代数. 如 F 代数 A 同构于某全矩阵代数 $M_n(F)$, 则称 A 为 F **上分裂中心单代数**.

设 A 是 F 代数. 定义 $A^e = A \otimes_F A^{\mathrm{op}}$, 称之为 A 的**包络代数**. 如 A 是 F 代数 B 的子代数, 则在 B 上可定义 A^e 的作用:

$$\left(\sum a_i \otimes b_i\right) y = \sum a_i y b_i, \quad \forall y \in B, a_i \in A, b_i \in A^{\mathrm{op}}. \tag{1}$$

根据张量积的普遍性质, 存在从 A^e 到 B 内的 F 线性同态, 使得 $\sum a_i \otimes b_i \mapsto \sum a_i y b_i$, 故 (1) 式是有定义的. 易证这是 A^e 模的作用. 特别, A 有 A^e 模结构. A 的 A^e 子模都是 A 的理想. 于是, 如 A 是单代数, 则 A 是不可约 A^e 模.

注意: 作为左 (或右) 正则 A 模, A 的自同态 $\varphi : A \to A$ 有形状

$$x \mapsto xa\ (\text{或} x \mapsto ax), \quad \forall x \in A,$$

这里 $a = \varphi(1) \in A$. 这推出 $\mathrm{End}_{A^e} A$ 是映射 $x \mapsto cx = xd$ 的集合, 这里 $c, d \in A$. 取 $x = 1$, 则有 $c = d$. 于是 $\mathrm{End}_{A^e} A$ 是映射 $x \mapsto cx$ 的集合, 这里 $c \in Z(A)$. 如 A 是 F 上中心代数, 则 $\mathrm{End}_{A^e} A$ 是映射 $x \mapsto \alpha x, \alpha \in F$ 的集合, 即 $\mathrm{End}_{A^e} A \cong F$. 我们将利用这些事实来证明关于 F 上中心单代数的一些性质.

(1.10.2) 定理 如 A 是 F 上中心单代数, 则

$$A^e = A \otimes_F A^{\mathrm{op}} \cong M_n(F),$$

这里 $n = \dim_F A$.

证 把 A 当作 A^e 模. 则 A 是不可约的, 且 $\mathrm{End}_{A^e} A \cong F$. 由定理 (1.7.2) 知, 存在从 A^e 到 $\mathrm{End}_F A$ 上的 F 代数同态 ψ. 因为

$$\dim_F A^e = \dim_F(\mathrm{End}_F A) = n^2,$$

故 ψ 是 F 代数同构. 因此结论可从 $\mathrm{End}_F A \cong M_n(F)$ 推出. □

接着要证的结论是关于含中心单子代数的 F 代数的结构.

(1.10.3) 定理 设 A 是 F 代数 B 的中心单子代数. 设 $C = C_B(A)$, 则 $B = A \otimes_F C$. 映射 $I \mapsto AI$ 给出从 C 的理想集合到 B 的理想集合上的双射, 进而, B 的中心 $Z(B)$ 等于 C 的中心 $Z(C)$.

证 如上, 把 B 当作 A^e 模. 由定理 (1.10.2) 知 A^e 是单代数. 故由定理 (1.5.4) 知, B 是同构于 A 的一些不可约 A^e 模的直和. 1 作为 A^e 模 A 的生成元满足: $\forall a \in A$,

$$(a \otimes 1)1 = a1 = 1a = (1 \otimes a)1,$$
$$(a \otimes 1)1 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

于是在任何不可约 A^e 模中可取元素 c 使 $\forall a \in A$,

$$(a \otimes 1)c = (1 \otimes a)c,$$
$$(a \otimes 1)c = 0 \Rightarrow a = 0.$$

由此可把 A^e 模 B 分解为 $B = \bigoplus Ac_\alpha$, 这里 $\forall a \in A, ac_\alpha = c_\alpha a$, 且 $ac_\alpha = 0 \Rightarrow a = 0$. 这推出 $c_\alpha \in C$. B 的每个元素可唯一地表为 $\sum a_\alpha c_\alpha$, 这里 $a_\alpha \in A$. 如 $c \in C$. 则 $c = \sum a_\alpha c_\alpha$. 由 $a \in A$ 与 $ac = ca$ 可推出 $aa_\alpha = a_\alpha a$. 因此 $a_\alpha \in F1$ 与 $c \in \sum Fc_\alpha$, 即 $C = \sum Fc_\alpha$. 显然, $\{c_\alpha\}$ 是 C 的 F 基. 根据 F 代数张量积的定义知 $B = A \otimes_F C$.

现设 I 是 C 的理想. 则 AI 是 $B = AC$ 的理想. 进而, 我们断言: $AI \bigcap C = I$. 这因为: 如 $(x_1 = 1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 A 的 F 基, 则 B 的每个元素可唯一地表为形状 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i, c_i \in C$. 于是 AI 的元素都有形状 $d = \sum d_i x_i$, 这里 $d_i \in I$. 如 $d \in C$, 则 d 有形状 $c_1 x_1, c_1 \in C$. 这推出 $C \bigcap AI$ 是形如 $d_1 x_1 = d \in I$ 的元素的集合. 于是 $C \bigcap AI = I$. 由此推出映射 $\psi : I \mapsto AI$ 是从 C 的理想集合到 B 的理想集合内的单射. 现要证明该映射是满射. 令 I' 为 B 的理想, 则 I' 是 A^e 模 B 的子模. 于是 $I' = \sum Ad_\beta$, 这里 $d_\beta \in I = I' \bigcap C$. 这推出 $I' = AI$, 即 ψ 是满射.

最后要证明 $Z(B) = Z(C)$. 显然, $Z(B) \subset C$. 故 $Z(B) \subset Z(C)$. 另一方面, 如 $c \in Z(C)$, 则 c 与 $B = AC$ 中每个元素相交换, 故 $c \in Z(B)$. □

在上述定理中可见: B 是单代数当且仅当 C 是单代数; B 是中心代数当且仅当 C 是中心代数.

根据 F 代数张量积的定义, 我们立即有:

(1.10.4) 推论 设 A 是 F 上中心单代数, C 是 F 代数.

(a) 如 C 是单代数, 则 $A \otimes_F C$ 是单代数.

(b) 如 C 是中心代数, 则 $A\otimes_F C$ 是中心代数.
特别, 如 E 是 F 的扩域, 则 $A\otimes_F E$ 是 E 上中心单代数.

称推论 (1.10.4) 中的 F 代数 $A\otimes_F E$ 为**由 A 通过基域扩张所得到的 E 代数**, 记作 A^E. 此时, 如存在 E 代数同构 $A^E\cong M_n(E)$, 这里 n 是某正整数, 则称 E 为 A 的**分裂域**.

由推论 (1.9.8) 知: 对于 E 的扩域 E', 存在 E' 代数同构

$$M_n(E)\otimes_E E'\cong M_n(E').$$

故当 E 是 A 的分裂域时, E 的任意扩域也是 A 的分裂域.

下面要证明 F 上中心单代数 A 的有限次分裂扩域的存在性. 由引理 (1.4.2) 与定理 (1.7.2) 知, 可写 $A=M_r(D)$, 其中 D 是 F 上中心可除代数. 我们要证明 D 的任意极大子域是 A 的分裂域.

(1.10.5) 定理 设 D 是 F 上中心可除代数, 则 F 的有限次扩域 E 是 D 的分裂域当且仅当 E 是 D 上某矩阵代数 $A=M_r(D)$ 的子域且 E 在 A 的中心化子 $C_A(E)$ 等于 E. 当这些条件成立时, 存在正整数 n 使得

$$\dim_F E=rn,\quad \dim_F D=n^2.$$

证 ($\Leftarrow$) 设 E 是 $A=M_r(D)$ 的子域使 $C_A(E)=E$. 由定理 (1.7.5) 知: A 可等同于 $\mathrm{End}_{D'}V$, 这里 V 是 D' 上 r 维向量空间, $D'=D^{\mathrm{op}}$, 于是 V 有一个 $D'\otimes_F E$ 模结构

$$(d\otimes e)x=dex=edx,\quad \forall d\in D',e\in E\subset A,x\in V.$$

因为由推论 (1.10.4) 知, $D'\otimes_F E$ 是单代数, 所以 $D'\otimes_F E$ 在 V 上的 E 表示 ρ 是忠实的 (即 $\rho: D'\otimes_F E\to \mathrm{End}_E V$ 是单射). 我们能把 $D'\otimes_F E$ 与 V 上对应的 E 线性变换环等同起来, 由于 $D'\otimes_F E$ 是 E 上单代数, 据定理 (1.5.2) 知, V 是完全可约 $D'\otimes_F E$ 模. 令 $\mathrm{End}_{D'}V=A$, 故 $\mathrm{End}_{D'\otimes D}V$ 是 E 在 A 内的中心化子. 由假设得 $E=\mathrm{End}_{D'\otimes D}V$. 因为 $\dim_{D'}V,\dim_F D'<\infty$, 所以 $\dim_F V<\infty$, 进而 $\dim_E V<\infty$. 由定理 (1.7.2) 得

$$D'\otimes_F E\cong \mathrm{End}_E V.$$

如果 $\dim_E V=n$, 则

$$D'\otimes_F E\cong M_n(E).$$

于是 E 是 F 代数 D' 的分裂域. 当然 E 也是 D 在 F 上的分裂域. 我们有

$$\dim_F D=\dim_F D'=\dim_E D'\otimes_F E=n^2,$$

$$\dim_F V = \dim_{D'} V \cdot \dim_F D' = rn^2 = \dim_E V \cdot \dim_F E = n\dim_F E.$$

因此　$\dim_F E = rn.$

($\Rightarrow$) 设 $D \otimes_F E \cong M_n(E)$. 则因 $M_n(E)$ 反同构于其本身,我们有

$$D' \otimes_F E \cong M_n(E).$$

令 V 为不可约 $D' \otimes_F E$ 模, 则 $D' \otimes_F E$ 可等同于 $\mathrm{End}_E V$, V 是 n 维 E 空间. 又, V 是 D' 上向量空间. 如 $\dim_{D'} V = r$, 则由于 E 中心化 D', 我们有 $E \subset \mathrm{End}_{D'} V$. E 在 $\mathrm{End}_{D'} V$ 内的中心化子属于 $D' \otimes_F E$ 在 $\mathrm{End}_E V$ 的中心化子. 由于 $D' \otimes_F E = \mathrm{End}_E V$, 我们有

$$C_{\mathrm{End}_{D'} V}(E) = E.$$

所以　$C_{M_n(D)}(E) = E.$ □

F 上中心可除代数 D 的极大子域的存在性可由 D 的 F 维数的有限性保证. 以下结论断定: 任何 F 上中心单代数的有限次分裂扩域 E/F 是存在的.

(1.10.6) 推论　*令 A 为 F 上中心单代数, 即存在 F 代数同构 $A \cong M_r(D)$, 这里 D 是 F 上可除代数, r 为某正整数, 则 D 的任何极大子域 E 是 A 的分裂域.*

证　只要证 E 是 D 的分裂域: 因一旦 $D \otimes_F E \cong M_n(E)$, 则

$$A \otimes_F E \cong M_r(D) \otimes_F E \cong M_r(D \otimes_F E) \cong M_r(M_n(E)) \cong M_{rn}(E).$$

令 $E' = C_D(E)$. 则 $E' \supset E$. 如 $E' \neq E$, 则可取 $c \in E' - E$, 因为由 c 在 E 上生成的可除代数是域 $E(c)$, 故 D 含有严格大于 E 的子域, 这与 E 的极大性相矛盾. 据定理 (1.10.5), E 是 D 的分裂域. □

习　题

1. 令 D 为 F 上中心可除代数, E 为 D 的极大子域. 证明: $\dim_F D = (\dim_F E)^2$.

2. 给定 F 代数 A 的自同构 f. 如存在 A 中可逆元 d 使得 $f(a) = d^{-1}ad$, $\forall a \in A$, 则称 f 为 A 的**内自同构**. 令 A 为 F 上中心单代数 B 的单子代数. 则任何从 A 到 B 内的单一同态 f 能被扩充为 B 的内自同构.

提示　注意 $E = A \otimes_F B^{\mathrm{op}}$ 是单代数. 在 B 上定义两种不同的 E 模结构:

$$\left(\sum a_i \otimes b_i\right) x = \sum a_i x b_i,$$
$$\left(\sum a_i \otimes b_i\right) x = \sum f(a_i) x b_i.$$

这里 $a_i \in A, b_i \in B^{\mathrm{op}}, x \in B$. 然后利用这两个 E 模结构是同构的事实.

3. 证明 F 上中心单代数的任何自同构是内自同构.

4. 设 D 是 $\mathbb{R}$ 上有限维可除代数. 如果 D 是交换的, 则要么 $D=\mathbb{R}$, 要么 $D=\mathbb{C}$. 如果 D 不是交换的, 则它的中心只能是 $\mathbb{R}$. 现设 D 是 $\mathbb{R}$ 上中心代数, $D \supsetneqq \mathbb{R}$. 则 D 含有元素 i 使 $i^2=-1$, 因 $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$ 有自同构 $a+bi \mapsto a-bi, \forall a,b \in \mathbb{R}$. 故存在 $j \in D$ 使 $ji=-ij$. 证明由 i 与 j 在 $\mathbb{R}$ 上生成的子代数是哈密顿四元数代数 $\mathbb{H}$. 证明 $\dim_{\mathbb{R}} D=4$ 与 $D=\mathbb{H}$.

提示 利用习题 3 的结果.

5. 证明: 如果 D_1 与 D_2 是 F 可除代数且 D_1 是中心代数, 则 $D_1 \otimes_F D_2 = M_r(E)$, 这里 E 是可除代数, $r|(\dim_F D_i), i=1,2$. 再证明: 如果 $\dim_F D_1$ 与 $\dim_F D_2$ 互素, 则 $D_1 \otimes D_2$ 是可除代数.

§1.11 范畴论的基本概念

为了后面的需要, 下面介绍范畴论的一些基本概念.

(1.11.1) 定义 一个范畴 $\mathscr{C}$ 由下列要素组成:

(a) 一族对象 $\mathrm{ob}\mathscr{C}$ (这些对象用大写英文字母表示. 有时简记 $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{C}$).

(b) 对于对象的有序对 (A,B), 从 A 到 B 内的态射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ (简记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$).

(c) 对于对象的有序三元组 (A,B,C), 关于集合的映射:

$$\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}\,(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C),$$
$$(h,g) \mapsto gh$$

其满足下述条件:

(a′) 如果 $(A,B) \neq (C,D)$, 则 $\mathrm{Hom}(A,B) \bigcap \mathrm{Hom}(C,D) = \varnothing$.

(b′) 如果 $f \in \mathrm{Hom}(A,B), g \in \mathrm{Hom}(B,C)$ 与 $h \in \mathrm{Hom}(C,D)$, 则 $(hg)f = h(gf)$ (故可将其表为 hgf).

(c′) 对于对象 A, 存在唯一的态射 $1_A \in \mathrm{Hom}(A,A)$ 使得 $f1_A = f$ 与 $1_A g = g, \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ 与 $g \in \mathrm{Hom}(B,A)$.

给定 $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$. 如果存在 $g \in \mathrm{Hom}(B,A)$ 使 $fg = 1_B$ 与 $gf = 1_A$, 则称 f 为同构.

(1.11.2) 例

(a) 设 A 是 F 代数. 我们可定义右 A 模范畴 $\mathscr{M}_A$ 如下: $\mathscr{M}_A$ 的对象是所有右 A 模. $\forall M,N \in \mathscr{M}_A$, 态射集合 $\mathrm{Hom}(M,N)$ 为从 M 到 N 内的所有右 A 模同态的集合. 定义:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad \forall f,g \in \mathrm{Hom}(M,N) \text{ 与 } x \in M,$$

则 Hom(M,N) 关于合成 "+" 形成一个阿贝尔群.

类似地可定义左 A 模范畴 ${}_A\mathscr{M}$.

(b) 定义阿贝尔群范畴 $\mathscr{AB}$ 如下: $\mathscr{AB}$ 的对象是所有阿贝尔群. $\forall M, N \in \mathscr{AB}$, 定义态射集合 Hom$(M,N)$ 为从 M 到 N 内的所有群同态的集合.

(1.11.3) 定义 设 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是二个范畴, 则从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 内的共变 (或反变) 函子 F 由下列要素组成:

(a) 从 ob$\mathscr{C}$ 到 ob$\mathscr{D}$ 的映射 $F: A \to FA$.

(b) 对于 $\mathscr{C}$ 的对象的有序对 (A,B), 从 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FA,FB)$ (或 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FB,FA)$) 内的一个映射 $f \mapsto F(f)$, 且满足:

$F1$: 如 gf 在 $\mathscr{C}$ 中有定义, 则 $F(gf) = F(g)F(f)$ (或 $F(gf) = F(f)F(g)$).

$F2: F(1_A) = 1_{FA}$.

(1.11.4) 例

(a) 固定 $X \in {}_A\mathscr{M}$, 定义函子 $F: {}_A\mathscr{M} \to \mathscr{AB}$ 使

$$FM := \mathrm{Hom}_A(X,M), \quad \forall M \in {}_A\mathscr{M}.$$

$\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, 令 $F\alpha: FM \to FN$ 为加群同态

$$\mathrm{Hom}_A(X,M) \to \mathrm{Hom}_A(X,N),$$
$$\beta \mapsto \alpha\beta.$$

显然, F 是共变函子. 通常记 F 为 $\mathrm{Hom}_A(X,—)$.

(b) 固定 $X \in {}_A\mathscr{M}$, 定义函子 $G: \mathscr{M}_A \to \mathscr{AB}$ 使

$$GM := M \otimes {}_A X, \quad \forall M \in \mathscr{M}_A.$$

$\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, 令 $G\alpha: GM \to GN$ 为 $G\alpha = \alpha \otimes 1$. 通常记 G 为 $— \otimes {}_A X$. 易见 G 是共变函子.

(c) 固定 $X \in {}_A\mathscr{M}$. 定义函子 $F: {}_A\mathscr{M} \to \mathscr{AB}$ 使

$$FM := \mathrm{Hom}_A(M,X), \quad \forall M \in {}_A\mathscr{M}.$$

$\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, 令 $F\alpha: \mathrm{Hom}_A(N,X) \to \mathrm{Hom}_A(M,X)$,

$$\beta \mapsto \beta\alpha,$$

它是加群同态. 通常记 F 为 $\mathrm{Hom}_A(—,X)$. 则 F 是反变函子.

(1.11.5) 定义 令 $F, G: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 为从范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{D}$ 内的二个函子. 如 $\forall A \in \mathrm{ob}\mathscr{C}$, 存在 $\eta_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FA, GA)$ 使 $\forall A, B \in \mathrm{ob}\mathscr{C}$ 与 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB \end{array}$$

即 $G(f)\cdot\eta_A=\eta_B\cdot F(f)$, 则记 $\eta: F\to G$. 并称 η 为从函子 F 到函子 G 的**自然变换**.

进而, 如果每个 η_A 都为同构, 则称 η 为**自然同构**. 此时记

$$F\cong G.$$

称范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ **等价**, 如果存在函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 与 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 使 $GF\cong 1_{\mathscr{C}}$ 与 $FG\cong 1_{\mathscr{D}}$. 特别, 当 $GF=1_{\mathscr{C}}$ 与 $FG=1_{\mathscr{D}}$ 时, 称范畴 $\mathscr{C}$ 与范畴 $\mathscr{D}$ **同构**.

(1.11.6) 定义 设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 与 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 之间的两个函子, 如 $\forall B\in\mathrm{ob}\mathscr{D}$ 与 $A\in\mathrm{ob}\mathscr{C}$, 存在双射

$$\eta_{B,A}:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(GB,A)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,FA).$$

它关于 A,B 是自然的, 即 $\forall B\in\mathrm{ob}\mathscr{D}$, 映射 $A\mapsto\eta_{B,A}$ 为从函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(GB,—)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,F—)$ 的自然同构; $\forall A\in\mathrm{ob}\mathscr{C}, B\mapsto\eta_{B,A}$ 为从函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G—,A)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(—,FA)$ 的自然同构, 则称 F 为 G 的**右伴随**, 而称 G 为 F 的**左伴随**. 映射 $\eta:(B,A)\mapsto\eta_{B,A}$ 称为从 G 到 F 的**转置伴随**, 称 (F,G,η) 为**附益的**.

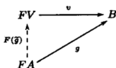
设 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是二个范畴, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是函子. $B\in\mathrm{ob}\mathscr{D}$.

(1.11.7) 定义 $\forall U\in\mathrm{ob}\mathscr{C}$ 与 $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,FU)$, 称二元组 (U,u) 为从 B 到函子 F 的一个**普遍性**, 如 $\forall A\in\mathrm{ob}\mathscr{C}$ 与 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,FA)$, 存在唯一的 $\widetilde{g}\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U,A)$ 使 $F(\widetilde{g})u=g$:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & FU \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle F(\widetilde{g})} & \\ FA & & \end{array}$$

$\forall V\in\mathrm{ob}\mathscr{C}$ 与 $v\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FV,B)$, 称二元组 (V,v) 为从函子 F 到 B 的一个**普遍性**, 如 $\forall A\in\mathrm{ob}\mathscr{C}$ 与 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FA,B)$, 存在唯一的 $\widetilde{g}\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,V)$ 使 $vF(\widetilde{g})=g$:

在上述情形中, 我们称 U (或 V) 为关于 B 的普遍 $\mathscr{C}$ **对象**, 称 u (或 v) 为**对应的普遍映射**.



习　　题

1. 验证例 (1.11.2) 中的 $\mathscr{M}_A$, ${}_A\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 都满足定义 (1.11.1) 里关于范畴的所有条件.

2. 设 B 是 F 代数 A 的子代数.

(a) 对于任何 A 模 $M = {}_AM$, 定义 $F({}_AM) = {}_BM$, 即通过 F 把 M 只当作左 B 模. 证明 $F: {}_A\mathscr{M} \to {}_B\mathscr{M}$ 是一个共变函子.

(b) 对于任何 B 模 $N = {}_BN$, 定义 $G({}_BN) = A \otimes {}_BN$, 由 §1.9 知 $A \otimes {}_BN$ 有左 A 模结构. 于是 B 模 ${}_BN$ 通过 G 变成了一个左 A 模. 证明 $G: {}_B\mathscr{M} \to {}_A\mathscr{M}$ 是一个共变函子.

注　称 F 为**纯量限制函子**, 称 G 为**诱导函子**. 这两个函子及其相互关系在群与代数的表示理论中有广泛应用.

3. 设 A 是 F 代数, n 是固定的正整数, $M_n(A)$ 是系数属于 A 的 $n \times n$ 全矩阵代数. 证明左 A 模范畴与左 $M_n(A)$ 模范畴是等价的.

第二章　群表示的基本概念

本章旨在介绍有限群表示的一般概念, 其中包括表示的合成与转换, 最后构造有限群的表示环. 目的是使读者对群表示理论的研究对象有个大致的了解, 这里注意我们所考虑的群都是有限的, 在本书中, 除非特别申明, 字母 G (或 F) 专用来表示群 (或域).

§2.1　群表示的基本概念

(2.1.1) 定义　*定义 G 的 F 表示为群同态*

$$\rho: G \to GL(V),$$

这里 $GL(V)$ 是有限维 F 空间 $V \neq 0$ 上的可逆线性变换群.

根据定义, G 的 F 表示由二元组 (ρ, V) 确定, G 通过 ρ 作用于 V. 称 V 为 G **模**或 G 的**表示空间**. 称 $\dim_F V$ 为表示的**次数**, 记作 $\deg\rho$. 为了叙述需要, 我们常讲 "表示 ρ "、"表示 V " 或 "表示 (ρ, V)" 等等. 当表示 $\rho: G \to GL(V)$ 给出后, $g \in G$ 作为 V 上线性变换原本应记作 $\rho(g)$. 但当不致引起混淆时, 也常记为 g. 于是可写 gv, $\forall v \in V$.

表示 ρ 的定义条件意味着 ρ 是满足等式

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \quad \forall g_i \in G \tag{1}$$

的从 G 到 $GL(V)$ 内的映射. 由此得出:

$$\rho(1) = 1_V, \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

进而, $\rho(g^m) = \rho(g)^m,\ \forall g \in G, m \in \mathbb{Z}.$
注意条件 "$\rho(g) \in GL(V), \forall g \in G$, 与等式 (1)" 等价于条件 "$\rho(g) \in \mathrm{End}_F V$, $\forall g \in G$, 等式 (1) 与 $\rho(1) = 1_V$". 于是我们有如下结论.

(2.1.2) 命题 *设 V 是有限维 F 空间, 则以下三种说法等价:*

(a) (ρ, V) 是 G 的 F 表示.

(b) ρ 是满足等式 (1) 的从 G 到 $GL(V)$ 内的映射.

(c) ρ 是满足等式 (1) 与 $\rho(1) = 1_V$ 的从 G 到 $\mathrm{End}_F V$ 内的映射.

(2.1.3) 矩阵表示 设 $B = (u_1, \cdots, u_n)$ 是 F 空间 V 的基. 则 $\forall a \in \mathrm{End}_F V$, 有

$$au_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} u_j, \quad \forall i, 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2}$$

这里 $\alpha_{ji} \in F$. 令 $\alpha = (\alpha_{ij})$ 为 $n \times n$ 矩阵, 这里 α_{ij} 是 α 的第 i 行与第 j 列相交处的系数. 则 $a \mapsto \alpha$ 是从 $\mathrm{End}_F V$ 到 $M_n(F)$ 上的环同构. 特别, 如 (ρ, V) 是 G 的 F 表示, 令 $\rho_B(g), g \in G$, 为 $\rho(g)$ 关于基 B 的矩阵, 则映射 $g \mapsto \rho_B(g)$ 是从 G 到 F 上 $n \times n$ 可逆矩阵群 $GL_n(F)$ 内的同态. 称之为 G 的**次数等于 n 的矩阵表示**. 如另取 V 的一组基 $C = (v_1, \cdots, v_n)$ 使 $v_i = \sum_j \mu_{ji} u_j$, 则 $\mu = (\mu_{ij}) \in GL_n(F)$. 记 $\rho_C(g)$ 为 $\rho(g)$ 关于基 C 的矩阵, 由线性代数理论知:

$$\rho_C(g) = \mu^{-1} \rho_B(g) \mu, \quad \forall g \in G. \tag{3}$$

(称满足等式 (3) 的两个矩阵表示 ρ_B, ρ_C (其中 $\mu \in GL_n(F)$ 与 $g \in G$ 的取法无关) 为 G 的**相似的矩阵表示**). 显然, 由表示 ρ 所引起的矩阵表示都是相似的.

(2.1.4) 表示的等价性 设 $(\rho_i, V_i), i = 1, 2$, 是 G 在 F 上的两个表示. 如存在线性空间的同构 $\eta: V_1 \to V_2$ 使

$$\rho_2(g) = \eta \rho_1(g) \eta^{-1}, \forall g \in G. \tag{4}$$

则称 ρ_1 与 ρ_2 为**等价的表示**, 记作 $\rho_1 \sim \rho_2$.

设 ρ_{i,B_i} 是由 ρ_i 所引起的任何矩阵表示, 则易见

$\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \rho_{1,B_1}$ 与 ρ_{2,B_2} 相似.

我们将视等价的表示为同一个表示. 同样, 相似的矩阵表示被当作同一个矩阵表示. 进而, 我们可把表示 ρ 与由 ρ 所引起的矩阵表示看作是同一个概念的两种表达形式. 矩阵表示的优点在于它的直观性, 但作为表示空间上的线性变换, 这种表达形式依赖于该空间的基的选取, 在应用上有其局限性, 而关于表示的定义 (2.1.1) 克服了这一局限性.

(2.1.5) 置换表示 设 S 是有限 G 集 $\{1,2,\cdots,n\}$. 则存在从 G 到对称群 S_n 内的群同态 π, 它满足

$$gi = \pi(g)i, \quad \forall g \in G, 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5}$$

设 V 是以 $(u_1,\cdots,u_n)$ 为 F 基的向量空间. 设 $\rho(g)$ 是 V 的线性变换使

$$\rho(g)u_i = u_{\pi(g)i}, \ \forall g \in G, 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{6}$$

则等式 $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ 与 $\rho(1) = 1_V$ 成立. 故由命题 (2.1.2) 知 ρ 是 G 的表示, 称这样得到的表示 ρ 为 G 的**置换表示**.

显然, G 的置换表示是 G 的保持其表示空间中某组基不变的那样一种表示. G 在该基下的表示矩阵是置换矩阵, 即每行每列恰有一个非零系数, 而那个非零系数等于 1 的矩阵.

最简单的置换表示是当 $|S| = 1$ 时的情形. 此时所引起的表示称为 G 的**单位表示**, 记作 $\mathbf{1}_G$ 或 $\mathbf{1}$, 对应的表示空间 V 是一维的:

$$\mathbf{1}_G(g) = 1_V, \quad \forall g \in G.$$

相应的矩阵表示为

$$g \mapsto (1),$$

这里 (1) 是系数等于 1 的 1×1 矩阵.

记 G 为当作集合的 G, 于是群 G 通过左平移:

$$G \times G \to G,$$
$$(g,h) \mapsto gh$$

作用于集合 G. 由此引起的 G 的置换表示称为 G 的**正则 F 表示**, 或简称为 G 的**正则表示**.

(2.1.6) 忠实表示 如 G 的表示 (ρ, V) 满足

$$\rho(g) \neq 1_V, \quad \forall g \in G, g \neq \mathbf{1},$$

则称 (ρ, V) 为**忠实的**.

任何群都有忠实表示, 譬如群的正则表示总是忠实的. 但当 $G \neq \{1\}$ 时, G 的单位表示不是忠实的, 根据定义, (ρ, V) 是 G 的忠实表示当且仅当同态 $\rho : G \to GL(V)$ 是单射, 当 (ρ, V) 是 G 的忠实表示时, G 可等同于 $GL(V)$ 的一个子群. 特别, 任何群 G 都可看作 $GL(V)$ 的一个子群, 这里 V 是某维数不大于 $|G|$ 的向量空间, 另外, $GL(V)$ 的自然表示显然是忠实表示 (注: $GL(V)$ 一般不是有限群, 但前面关于群表示的定义对于无限群也是适合的).

(2.1.7) 例

(a) 设 $G=\langle g\rangle$ 是由元素 g 生成的 n 阶循环群, 则存在群同态 $\pi: G\to S_n$ 使

$$\pi(g)=(12\cdots n):\ i\mapsto i+1,\quad \forall 1\leqslant i<n,\qquad n\mapsto 1.$$

这等价于 G 对它本身的左平移作用, 其所引起的 G 的置换表示 (即 G 的正则表示) 把 g 映成线性变换 $\rho(g)$ 使

$$\begin{cases}\rho(g)u_i=u_{i+1}, & 1\leqslant i<n\\ \rho(g)u_n=u_1.\end{cases}\tag{7}$$

g 在基 $(u_1,\cdots,u_n)$ 下的表示矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}\tag{8}$$

(b) 设 $G=S_3=\{1,(12),(13),(23),(123),(132)\}$. 设 π 是 G 内的恒等映射, 则 π 所引起的 G 的置换表示的矩阵为

$$\mathbf{1}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad (12)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(13)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad (23)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(123)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad (132)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(2.1.8) 子表示与商表示 设 (ρ,V) 是 G 的 F 表示. 如 U 是 V 的子空间使 $\rho(g)U\subseteq U$, $\forall g\in G$, 则称 U 为 V 的 G **不变子空间**. 此时, 令 $\rho_U(g):=\rho(g)_U$ 为 $\rho(g)$ 在 U 上的限制作用. 则我们得到 G 的另一个表示 (ρ_U,U), 称为 ρ 的**子表示**.

现设 (ρ_U, U) 是 (ρ, V) 的子表示, 在商空间 V/U 上可定义: $\forall g \in G$,

$$\rho_{V/U}(g) : x + U \mapsto \rho(g)x + U, \quad \forall x \in V. \tag{9}$$

易证 $\rho_{V/U}$ 也是 G 的表示, 称为 ρ 的**商表示**.

设 $B = (u_1, \cdots, u_n)$ 是 V 的 F 基使 $(u_1, \cdots, u_r)$ 是 G 不变子空间 U 的基. 考虑由 B 所确定的矩阵表示 ρ_B. 因为 U 被每个 $\rho(g)$ 所稳定, $\rho(g)u_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, 是向量 $u_1, \cdots, u_r$ 的线性组合. 于是每个矩阵 $\rho_B(g), g \in G$, 有形状

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} & \beta_{1,r+1} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rr} & \beta_{r,r+1} & \cdots & \beta_{rn} \\ \hline & & & \beta_{r+1,r+1} & \cdots & \beta_{r+1,n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & \beta_{n,r+1} & \cdots & \beta_{nn} \end{array}\right), \tag{10}$$

这里左上角的那个 $r \times r$ 子矩阵是 ρ_U 关于基 $(u_1, \cdots, u_r)$ 的表示矩阵, 右下角的那个 $(n-r) \times (n-r)$ 子矩阵是 $\rho_{V/U}$ 关于基 $(u_{r+1} + U, \cdots, u_n + U)$ 的表示矩阵, 反之, 如果存在基 $(u_1, \cdots, u_n)$ 使 $\rho(g), g \in G$ 的矩阵都有形状 (10), 则 $U = \sum_{j=1}^{r} F u_j$ 是空间 V 的 $\rho(G)$ 不变子空间, 即 ρ 的子表示.

(2.1.9) $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 上的表示 设 (ρ, V) 与 (η, W) 是 G 的两个 F 表示. 设 $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 是从 V 到 W 内的 F 线性映射所组成的 F 空间. $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$ 与 $g \in G$, 定义映射 $g\varphi : V \to W$ 使以下等式成立:

$$(g\varphi)(v) := g(\varphi(g^{-1}v)), \quad \forall v \in V. \tag{11}$$

易证这给出了 G 在 $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 上的 F 表示, 其次数等于 $\deg \rho \cdot \deg \eta$.

设 (ρ, V) 是 G 的表示, $v \in V$. 如 $\forall g \in G$, 恒有 $gv = v$, 则称 v 为 G 的**固定点**. 以 $\mathrm{In\ v}_G(V)$ 记 V 的 G 固定点集合, 显然 $\mathrm{In\ v}_G(V)$ 是 V 的 G 不变子空间.

设 $(\rho_i, V_i), i = 1, 2$, 是 G 的两个表示. 如 F 线性映射 $f : V_1 \to V_2$ 满足:

$$f(gv) = gf(v), \quad \forall v \in V_1, \quad g \in G,$$

则称 f 为 G **模映射**, 记 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ 为从 V_1 到 V_2 内的所有 G 模映射组成的集合, 则 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ 是 $\mathrm{Hom}_F(V_1, V_2)$ 的子空间.

在上面我们已定义了 $\mathrm{Hom}_F(V_1, V_2)$ 上的 G 模结构. 我们看到: $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \mathrm{In\ v}_G(\mathrm{Hom}_F(V_1, V_2))$ 是 $\mathrm{Hom}_F(V_1, V_2)$ 的子表示.

(2.1.10) 表示空间的 Hermitian 内积 我们已经知道由 G 的给定表示所引起的矩阵表示都是相似的. 但下面的命题告诉我们: 当 F 为复数域 $\mathbb{C}$ 时, 表示空间 V 的基的某种选取比其它选法显得更自然些.

(2.1.11) 命题 设 (ρ, V) 是 G 的复表示 (即复数域上的表示). 则存在 V 的 Hermitian 内积 $\langle -,- \rangle$, 使

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle gv_1, gv_2 \rangle, \quad \forall g \in G \text{ 与 } v_1, v_2 \in V.$$

于是 G 的任何表示都等价于由酉矩阵给出的表示.

证 取 V 的任意基 $(u_1, \cdots, u_n)$. 令 $(-,-)$ 为关于该基的通常 Hermitian 内积:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{n} b_j u_j \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i, \tag{12}$$

这里 $\bar{b}$ 是 $b \in \mathbb{C}$ 的复共轭. $\forall v_1, v_2 \in V$, 定义

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gv_1, gv_2). \tag{13}$$

显然, $\langle -,- \rangle$ 也是 V 上的 Hermitian 内积. 又, $\forall h \in G$,

$$\begin{aligned} \langle hv_1, hv_2 \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ghv_1, ghv_2) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gv_1, gv_2) = \langle v_1, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

上式中间那个等号成立是由于 $\{g | g \in G\} = \{gh | g \in G\}$.

应用 Gram-Schmidt 程序, 我们能找到 V 的关于 Hermitian 内积 $\langle -,- \rangle$ 的一组正规正交基. 关于这组基, G 的所有表示矩阵都是酉矩阵. □

(2.1.12) 推论 设 (ρ, V) 是 G 的复表示, 则对于 G 的每个元素 g, 存在 V 的基使 $\rho(g)$ 关于此基的矩阵是对角的.

证 这是因为每个酉矩阵都可对角化. □

习 题

1. 设 ρ 是例 (2.1.7) 中所给的 n 阶循环群 $\langle g \rangle$ 的复表示. 设 ρ' 是 $\langle g \rangle$ 的如下定义的复表示: $\rho'(g)u_j = \zeta^j u_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, 这里 $\zeta = e^{2\pi i/n}$, 记号 u_j 如同例 (2.1.7). 证明: $\rho \sim \rho'$.

2. 证明 G 的二个一维表示是等价的当且仅当它们作为映射是相等的.

3. 设 F 是域, $h_1, \cdots, h_m$ 是一组给定的正整数, 定义集合 $X = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) | \omega_i \in F, \omega_i^{h_i} = 1\}$. 令 q 为 $h_1, \cdots, h_m$ 的最小公倍数. 试证: $|X| = \prod_{i=1}^{m} h_i$ 当且仅当 char. $F \nmid q$. 现设 G 是指数为 q 的有限阿贝尔群(即 q 是 G 的元素阶数的最小公倍数). 试证: G 恰有 $|G|$ 个不等价的一维表示当且仅当 char. $F \nmid q$.

提示 可写 $G = G_1 \times \cdots \times G_m$, 这里 $|G_i| = h_i = p_i^{a_i}, p_i$ 是素数, $G_i = \langle x_i \rangle$ 是 h_i 阶循环群. 易见 G 的一维表示 ρ 由像 $\rho(x_1), \cdots, \rho(x_m)$ 所完全确定, 而像 $\rho(x_i) \in F, i = 1, 2, \cdots, m$, 在满足条件 $\rho(x_i)^{h_i} = 1$ 的前提下可互相独立选取.

§2.2 群表示的一些常用构造法

研究群表示理论的第一步是构造出尽可能多的表示, 并判断哪些表示是等价的. 本节要介绍从 G 的已知表示出发构造 G 的新表示的一些常用方法.

(2.2.1) 表示的张量积 设 V_1 与 V_2 是二个 F 空间, 则张量积 $V_1 \otimes_F V_2$ (可简记作 $V_1 \otimes V_2$) 也是 F 空间. 另一方面, 令 $a_i \in \mathrm{End}_F V_i, i = 1, 2$. 回忆 $a_1 \otimes a_2 \in \mathrm{End}_F(V_1 \otimes V_2)$ 满足

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot \sum_j (v_{1j} \otimes v_{2j}) = \sum_j (a_1 v_{1j} \otimes a_2 v_{2j}), \ \forall v_{ij} \in V_i. \tag{1}$$

如 $b_i \in \mathrm{End}_F V_i, i = 1, 2$, 则

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2. \tag{2}$$

现设 $(\rho_i, V_i), i = 1, 2$, 是 G 的 F 表示. 定义 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 为

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g), \quad \forall g \in G. \tag{3}$$

则 $\forall g_1, g_2 \in G$, 有

$$\begin{aligned}
(\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1 g_2) &= \rho(g_1 g_2) \otimes \rho_2(g_1 g_2) \\
&= \rho_1(g_1)\rho_1(g_2) \otimes \rho_2(g_1)\rho_2(g_2) \\
&= (\rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_1))(\rho_1(g_2) \otimes \rho_2(g_2)) \quad (\text{由 (2) 式}) \\
&= ((\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1))((\rho_1 \otimes \rho_2)(g_2)).
\end{aligned}$$

于是 $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ 是 G 的 F 表示, 称为表示 ρ_1 与 ρ_2 的**张量积**.

容易验证: 当 ρ_2 是 G 的单位表示时, 表示 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 与 ρ_1 等价.

如 $B_1 = (u_1, \cdots, u_n)$ 是 V_1 的 F 基, $B_2 = (v_1, \cdots, v_m)$ 是 V_2 的 F 基, 则

$$(u_1 \otimes v_1, \cdots, u_1 \otimes v_m, \cdots, u_n \otimes v_1, \cdots, u_n \otimes v_m) \tag{4}$$

组成了 $V_1 \otimes V_2$ 的 F 基. $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)$ 关于 (4) 式中基的矩阵是

$$\rho_{1,B_1}(g) \otimes \rho_{2,B_2}(g) (\text{见§1.9(1)式}).$$

(2.2.2) 反轭表示　线性代数理论告诉我们: 有限维 F 空间 V 上的 F 线性函数全体形成与 V 有相同维数的 F 空间, 称为 V 的**对偶空间**, 记作 V^*.V 的任何一组基 $(u_1,\cdots,u_n)$ 确定了 V^* 的一组对偶基 $(u_1^*,\cdots,u_n^*)$, 满足

$$u_i^*(u_j)=\delta_{ij},\quad \forall 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

这里 δ_{ij} 为克罗内克符号, 即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如 } i=j,\\ 0, & \text{如 } i\neq j.\end{cases}$$

如 $a\in \mathrm{End}_F V$, 则存在 $a^*\in \mathrm{End}_F V^*$ 使得

$$(a^*x^*)(y):=x^*(ay),\quad \forall y\in V,\quad x^*\in V^*. \tag{5}$$

如 $au_i=\sum\limits_j \alpha_{ji}u_j$ 与 $a^*u_k^*=\sum\limits_l \beta_{lk}u_l^*$, 则

$$(a^*u_k^*)(u_i)=\sum_l \beta_{lk}u_l^*(u_i)=\beta_{ik},$$

$$u_k^*(au_i)=u_k^*\left(\sum_j \alpha_{ji}u_j\right)=\alpha_{ki}.$$

于是 $\beta_{ik}=\alpha_{ki}$. 所以 a^* 关于基 $(u_1^*,\cdots,u_n^*)$ 的矩阵等于 a 关于基 $(u_1,\cdots,u_n)$ 的矩阵的转置. 映射

$$a\mapsto a^*$$

是从 $\mathrm{End}_F V$ 到 $\mathrm{End}_F V^*$ 上的代数反同构. 由此推出

$$a\mapsto (a^*)^{-1}$$

是 $GL(V)$ 到 $GL(V^*)$ 上的群同构.

现设 (ρ,V) 是 G 的表示. 则

$$\rho^*: g\mapsto (\rho(g)^*)^{-1}, \forall g\in G \tag{6}$$

给出 G 在 V^* 上的表示, 称 ρ^* 为 ρ 的**反轭表示**.

显然, $\deg \rho^*=\deg \rho$. 进而, 设 B 是 V 的基, B^* 是 V^* 的关于 B 的对偶基, 则相应的矩阵表示 $g\mapsto \rho_B(g)$ 与 $g\mapsto \rho^*_{B^*}(g)$ 满足关系式

$$\rho^*_{B^*}(g)=(\rho_B(g)^{\mathrm T})^{-1}, \tag{7}$$

这里 a^{T} 是矩阵 a 的转置, 特别, 可推出

$$(g \cdot x^*)(y) = x^*(g^{-1}y).$$

设 (ρ, V) 是 G 的复表示, 取 V 的一组基 B, 则 $\forall g \in G$, $\rho_B(g)$ 是 $n \times n$ 复矩阵 (即系数是复数的矩阵). 设 $\overline{\rho}_B(g)$ 是通过对 $\rho_B(g)$ 的系数施以复共轭变换而得的矩阵, 则 $\overline{\rho}_B(g) \in GL_n(\mathbb{C})$. 显然, 存在 G 的表示 $\overline{\rho}: G \to GL(V)$ 使 $\overline{\rho}_B$ 是 $\overline{\rho}$ 关于基 B 的矩阵表示. 此时的表示空间记作 $\overline{V}$.

(2.2.3) 命题 *设 ρ 是 G 的复表示, 则 $\overline{\rho} \sim \rho^*$.*

证 由命题 (2.1.11), 可设 ρ 的表示空间 V 有 G 不变的 Hermitian 内积. 取 V 关于该内积的一组正规正交基, 则 G 通过酉阵作用于该基, 但对酉阵取逆转置与对酉阵的系数作复共轭变换是一回事. □

(2.2.4) 表示的直和 设 $(\rho_i, V_i), i = 1, 2$, 是 G 的两个 F 表示. 今在 F 空间 V_1 与 V_2 的直和 $V_1 \oplus V_2$ 上定义 G 的作用如下:

$$g(v_1, v_2) := (gv_1, gv_2), \quad \forall g \in G, (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2.$$

易见这给出了 G 的一个新表示, 记作 $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$, 称为表示 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) 的**直和**. 用矩阵来描述该表示就更直观了. 设 B_i 是 V_i 的基, $i = 1, 2$, 则 $B = B_1 \bigcup B_2$ 是 $V_1 \oplus V_2$ 的基. 我们有

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)_B(g) = \begin{pmatrix} \rho_{1,B_1}(g) & 0 \\ 0 & \rho_{2,B_2}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G.$$

设 G 的表示 (ρ, V) 可分解为两个子表示 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2', V_2) 的直和. 设 p 是由分解式 $V = V_1 \oplus V_2$ 所确定的从 V 到 V_1 上的射影, 将元素 $x \in V$ 表为

$$x = y_1 + y_2,$$

这里 $y_i \in V_i$, 则有

$$gx = gy_1 + gy_2, \quad gy_i \in V_i \ (i = 1, 2), \quad \forall g \in G.$$

于是 $p(gx) = gy_1 = g(px)$. 即 p 与 G 的作用相交换. 反之, 设 U 是任何 G 不变子空间, 设存在从 V 到 U 上的射影 p, 它与 G 的作用相交换, 可写

$$V = pV \oplus (1_V - p)V,$$

则 $pV = U$. 因为

$$g(1_V - p)V = (1_V - p)gV \subseteq (1_V - p)V,$$

所以 $U' = (1_V - p)V$ 是 G 不变的, 这样我们就得到了 V 关于子表示的一个直和分解

$$V = U \oplus U'.$$

如上, 我们称 U 与 U' 在 V 中互为补表示. 上面的讨论揭示了: V 的子表示 U 的补表示存在当且仅当存在从 V 到 U 上的与 G 的作用相交换的射影.

(2.2.5) 表示 $V^* \otimes_F W$ 与 $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 的等价性 回忆在 (2.1.9) 与 (2.2.1) 中, 我们从 G 的二个表示 V 与 W 出发分别构造了表示 $V \otimes_F W$ 与 $\mathrm{Hom}_F(V, W)$. 今定义映射

$$\varphi : V^* \oplus_F W \to \mathrm{Hom}_F(V, W),$$
$$\sum_i f_i \otimes w_i \longmapsto \sum_i \varphi(f_i \otimes w_i)$$

使得
$$\sum_i \varphi(f_i \otimes w_i)(v) = \sum_i f_i(v) w_i, \quad \forall v \in V. \tag{8}$$

则 φ 是向量空间的同构, 而且, $\forall g \in G$ 与 $\sum\limits_i f_i \otimes w_i \in V^* \otimes_F W$, 我们有

$$\begin{aligned}
\varphi\left(g \cdot \sum_i f_i \otimes w_i\right)(v) &= \varphi\left(\sum_i g f_i \otimes g w_i\right)(v) \\
&= \sum_i \varphi(g f_i \otimes g w_i)(v) \\
&= \sum_i (g f_i)(v) g w_i \\
&= \sum_i f_i(g^{-1} v) g w_i \\
&= g \cdot \sum_i f_i(g^{-1} v) w_i \\
&= g \cdot \varphi\left(\sum_i (f_i \otimes w_i)\right)(g^{-1} v) \\
&= \left(g \cdot \varphi\left(\sum_i f_i \otimes w_i\right)\right)(v), \ \forall v \in V,
\end{aligned}$$

所以
$$\varphi\left(g \cdot \sum_i f_i \otimes w_i\right) = g \cdot \varphi\left(\sum_i f_i \otimes w_i\right).$$

由此推出表示 $V^* \otimes_F W$ 与 $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 是等价的.

特别, 域 F 作为一维 F 空间可提供 G 的一个单位表示. 由 (2.2.1) 知 G 的表示 $V^* \otimes_F F$ 与 V^* 等价. 于是推出 V 的反轭表示 V^* 与表示 $\mathrm{Hom}_F(V, F)$ 是等价的.

习　　题

1. 证明: 如 $(\rho_i, V_i), i=1,2$ 是 G 的两个表示, 则 $\rho_1 \otimes \rho_2 \sim \rho_2 \otimes \rho_1$.

2. 注意关于群表示的定义 (2.1.1) 当 G 是无限群时也适用. 设 V 是有限维 F 空间, l 是 $GL(V)$ 上的恒等映射, 则 (l, V) 是 $GL(V)$ 的表示.

考虑 $GL(V)$ 在 $V^* \otimes V$ 上的表示 $l^* \otimes l$. 证明集合

$$\{c \in V^* \otimes V | (l^* \otimes l)(a)c = c, \quad \forall a \in G\}$$

是 $V^* \otimes V$ 的一维子空间. 试找出该子空间里的一个非零元.

3. 设 (ρ, V) 是群 G 的 F 表示. 对于任何 $k \in \mathbb{N}$, 考虑表示的和: (ρ^k, V^k), 这里 V^k 是 k 个 F 空间 V 的直和, 对于每个 $g \in G$ 和 $v = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$, 定义 $\rho^k(g)(v) = (\rho(g)v_1, \dots, \rho(g)v_k)$. 令 $F_k(V)$ 为由所有函数 $f: \{1, 2, \dots, k\} \to V$ 组成的 F 空间. 对于 $f \in F_k(V)$ 和 $g \in G$, 定义 G 在 $F_k(V)$ 上的变换 $\tau(g): (\tau(g)f)(i) = \rho(g)(f(i)), \forall 1 \leqslant i \leqslant k$. 证明:

(a) $(\tau, F_k(V))$ 是 G 的 F 表示.

(b) $(\tau, F_k(V)) \sim (\rho^k, V^k)$.

§2.3 表示在不同群之间的合成与转换

在 §2.2 里, 我们所讨论的群表示的合成与转换只涉及一个固定的群. 现在我们要考虑如下问题: 一个群的表示如何由与其相关的其它群的表示中构造出来?

(2.3.1) 表示的提升 给定群的同态 $\pi: G \to K$ 和群 K 的表示 $\eta: K \to GL(V)$, 我们可得到 G 的表示

$$\rho = \eta \cdot \pi : G \to GL(V), \tag{1}$$

称 ρ 为 η 通过 π 的**提升**.

显然, 表示 η 与 ρ 有相同的表示空间, 故它们的次数相同. 特别当 K 是 G 的商群且 π 是自然映射时, ρ 被简称为 η 的**提升**.

给定 G 的表示 (ρ, V), 称

$$\ker\rho = \{g \in G | \rho(g) = 1_V\} \tag{2}$$

为表示 ρ 的**核**. 显然, $\ker\rho$ 是 G 的正规子群. 如 $N \lhd G$, η 为 G/N 的表示, 又如 G 的表示 ρ 是 η 的提升, 则 $\ker\rho \supseteq N$. 反之, 给定 G 的表示 (ρ, V), 令 M 为

G 的任何含于 $\ker\rho$ 中的正规子群, 则 ρ 引起 G/M 的唯一表示 $\overline{\rho}$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/M \\ & \rho\searrow \quad \swarrow\overline{\rho} & \\ & GL(V) & \end{array} \tag{3}$$

由此可得以下结果.

(2.3.2) 命题 设 $N \lhd G$. 则自然映射 $\pi: G \to G/N$ 引起双射:

$$G/N\text{的表示集合} \ \to \ G\text{的其核含 }N\text{的表示集合}$$

$$(\overline{\eta}, V) \longmapsto (\eta, V)$$

使得 η 是 $\overline{\eta}$ 的提升.

据命题 (2.3.2), 我们可把 G/N 的表示集合与 G 的其核含 N 的表示集合等同起来.

下面要介绍两类重要的表示, 它们都可通过表示的提升来得到.

(2.3.3) 限制表示 设 $H \leqslant G$, 则嵌入映射 $i: H \hookrightarrow G$ (即 $i(x) = x, \forall x \in H$) 是群的同态. 于是 G 的每个表示 ρ 都可通过 i 而提升为 H 的表示, 记作 ρ_H, 称 ρ_H 为 ρ 在 H 上的**限制表示**, 又称 ρ 为 ρ_H 到 G 上的**扩充.**

一般而言, H 的表示不一定都可扩充为 G 的表示. 当这个扩充存在时, 它也不必是唯一的.

(2.3.4) 共轭表示 设 $H \lhd G$ 和 $g \in G$. 则映射 $\sigma_g: h \mapsto {}^g h := ghg^{-1}$ 是从子群 $H^g := \{h^g = g^{-1}hg | h \in H\}$ 到 H 的同构. 由 (2.3.1) 知: H 的任何表示 (ρ, V) 都可通过 σ_g 而提升为 H^g 的一个表示, 记作 $({}^g\rho, {}^gV)$, 称其为 (ρ, V) 的**共轭表示**. 对于固定的 $g \in G$, 映射 $\rho \mapsto {}^g\rho$ 是从 H 的表示集合到 H^g 的表示集合上的双射. 特别, 当 $H \lhd G$ 时, 给定 H 的表示 ρ, 记 $T(\rho) = T_G(\rho) := \{g \in G | {}^g\rho \sim \rho\}$. 称为 ρ 在 G 中的**惯性群**. 显然, $T(\rho)$ 是 G 的含 H 的子群. 惯性群对于将要研究的诱导表示理论十分重要 (见 §6.1).

(2.3.5) 群的直积的表示 现考虑如何从因子群的表示出发来构造群的直积的表示. 设 G 是群 G_1 与 G_2 的直积. 设 ρ_i 是 G_i 的表示, $i = 1, 2$. 设 p_i 是从 $G = G_1 \times G_2$ 到 G_i 上的射影:

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_i, \quad i = 1, 2.$$

根据 (2.3.1), 我们可通过 p_i 把 ρ_i 提升为 G 的表示 ρ_i'. 再据 (2.2.1), 我们能进一步作表示的张量积 $\rho_1' \otimes \rho_2'$. 记

$$\rho_1 \# \rho_2 := \rho_1' \otimes \rho_2'. \tag{4}$$

于是

$$(\rho_1\#\rho_2)(g_1,g_2)=\rho_1(g_1)\otimes\rho_2(g_2),\quad \forall(g_1,g_2)\in G.$$

更一般地, 令 $G=G_1\times\cdots\times G_r, r\in\mathbb{N}$. 令 ρ_i 为 G_i 的表示, $1\leqslant i\leqslant r$. 则我们可递归地用上面的方法构造出 G 的表示 $\rho_1\#\cdots\#\rho_r$, 它满足

$$(\rho_1\#\cdots\#\rho_r)(g_1,\cdots,g_r)=\rho_1(g_1)\otimes\cdots\otimes\rho_r(g_r),\forall(g_1,\cdots,g_r)\in G. \tag{5}$$

显然,

$$\deg\,(\rho_1\#\cdots\#\rho_r)=\prod_{i=1}^{r}\deg\rho_i. \tag{6}$$

注: 今后要证明: 当 $F=\mathbb{C}$ 时, $G=G_1\times\cdots\times G_r$ 的所有表示都是上述形状表示的有限直和 (见 (4.2.4)). 于是, 关于 G 的表示的研究可归结为对其因子群的表示的研究.

(2.3.6) 诱导表示 我们在 (2.3.5) 里给出了从群 G 的一些特殊子群的表示出发来构造 G 的表示的方法. 现考虑更一般的情形. 设 $H\leqslant G$. 我们要从 H 的表示出发来构造 G 的表示. 为此, 我们要介绍诱导表示的概念. 研究诱导表示是表示论最中心的课题之一, 此处我们只给出定义与一个例子, 进一步的讨论则要留待今后去做.

设 (ρ,V) 是 G 的表示. 设 θ 是 ρ 在子群 H 上的限制, 设 W 是 V 的 H 不变子空间, 则 (θ_W,W) 是 H 的表示. 令 $g\in G$. 由于

$$\rho(gh)W=\rho(g)\rho(h)W=\rho(g)W,\quad \forall h\in H,$$

我们看到 $\rho(g)W$ 只依赖于元素 g 所在的左陪集 gH, 于是, 如果 σ 是 G 的 H 左陪集, 则可定义 $W_\sigma:=\rho(g)W$, 这里 g 是 σ 中任意元素. 显然, $\{W_\sigma|\sigma\in G/H\}$ 被 $\rho(g),g\in G$, 所置换, 和式 $\sum\limits_{\sigma\in G/H}W_\sigma$ 是 V 的子表示.

定义 *称 G 的表示 (ρ,V) 为 G 的由子群 H 的表示 (θ_W,W) 诱导而得的表示 (或简称 G 的 H **诱导表示**), 如 $V=\bigoplus\limits_{\sigma\in G/H}W_\sigma$.*

把上面的表示 ρ 记作 $\mathrm{Ind}_H^G(\theta_W),(\theta_W)_H^G$ 或 $(\theta_W)^G$, 同时把 V 记作 Ind_H^GW, W_H^G 或 W^G.

关于诱导表示的条件 $V=\bigoplus\limits_{\sigma\in G/H}W_\sigma$ 有如下两个等价的说法:

(a) 每个 $x\in V$ 可唯一地表成形状 $x=\sum\limits_{\sigma\in G/H}x_\sigma,\ x_\sigma\in W_\sigma$.

(b) 如 R 是 G/H 在 G 中的代表元系, 则 $V=\bigoplus\limits_{r\in R}\rho(r)W$.

如 ρ 是 G 的由子群 H 的表示 θ 诱导而得的表示, 则

$$\deg\rho=[G:H]\deg\theta. \tag{7}$$

(2.3.7) 例 设 $H \leqslant G$. 令 (ρ, V) 为 G 的正则 F 表示. 则存在 V 的 F 基 $\{e_t\}_{t\in G}$ 使得

$$\rho(s)e_t = e_{st}, \quad \forall s, t \in G.$$

令 W 为 V 的由 $\{e_t\}_{t\in H}$ 所张成的子空间, 则 W 是 $\rho(H)$ 不变的. 记 $\theta = \rho_H$, 则 (θ_W, W) 是 H 的正则 F 表示, 我们有

$$\rho = \mathrm{Ind}_H^G \theta_W.$$

习 题

在习题 1、2 中, 设 $G = S_4$ 是集合 {1,2,3,4}上的对称群. 则

$$V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$$

是 S_4 的正规子群, 这里记号 $(i_1 i_2 \cdots i_r)$ 表示置换:

$$i_j \longmapsto \begin{cases} i_{j+1}, & 如\ 1 \leqslant j < r, \\ i_1, & 如\ j = r. \end{cases}$$

通常称 V 为 **Klein 四元群**. 元素 4 在 S_4 中的稳定子 $\{\pi \in S_4 | \pi(4) = 4\}$ 同构于 3 次对称群 S_3, 且存在群同构:

$$S_4 \cong V \rtimes S_3.$$

1. 验证群 V 有一次矩阵表示 σ 使得 $\sigma((12)(34)) = (-1)$ 与 $\sigma((13)(24)) = (-1)$. 试找出 σ 的所有 G共轭表示与惯性群 $T_G(\sigma)$, 从而证明 σ 的不等价 G 共轭表示个数等于 $[G : T_G(\sigma)]$.

2. 验证: (a) 群 S_3 有一次矩阵表示 τ 使得 $\tau((12)) = (-1)$ 与 $\tau((23)) = (-1)$.

(b) 群 S_4 有 4 次矩阵表示 ρ 使得 $\rho((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\rho((23)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho((34)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $\rho \sim \mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \tau$.

3. 称群 G 的 $\mathbb{C}$ 表示 (ρ, V) 是实的, 如果 $\rho \sim \overline{\rho}$; (ρ, V) 是复的, 如果 $\rho \nsim \overline{\rho}$. 证明: Clifford 群 $\mathbb{CL}(n)$ (见 §1.1, 习题 7) 的一次表示都是实的.

4. 设 $Q_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 是四元数群. 设 $\mathbb{H} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}j \oplus \mathbb{Q}k$ 是由四元数在有理数域上生成的除环. 则 Q_2 在 $\mathbb{H}$ 上的左乘作用使得 $\mathbb{H}$ 成为 $\mathbb{Q}[Q_2]$ 模.

(a) 证明: $\mathbb{H}$ 是单 $\mathbb{Q}[Q_2]$ 模.

令 $\xi = -(1+i+j+k)/2 \in \mathbb{H}$.

(b) 证明: $\xi^3 = 1$.

令 $H = \langle x \rangle$ 为 3 阶循环群, 定义 H 在 $\mathbb{H}$ 上的作用: $x \cdot v = \xi v$, $\forall v \in \mathbb{H}$.

(c) 证明: $\mathbb{H}$ 是单 $\mathbb{Q}[Q_2 \times H]$ 模, 且 $\mathbb{H}$ 不能被表成形状 $M\#N$, 其中 M 和 N 分别是单 $\mathbb{Q}[Q_2]$ 模和单 $\mathbb{Q}[H]$ 模.

§2.4 表示的可约性

在群 G 的所有表示的集合中, 我们希望能找到这样一个子集, 使这个子集里的元素具有相对简单的性质, 且使对于 G 的其它表示的研究能归结为对于这个子集的元素的研究. 为此, 我们要研究表示的可约性.

(2.4.1) 定义 *如 G 的表示 ρ 所仅含有的子表示是其本身, 则称 ρ 为*不可约表示. *以 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 或 $\overline{\mathrm{Irr}} G$ 记 G 中所有不可约 F 表示组成的集合.*

如 G 的表示 ρ 可分解成它的不可约子表示的直和, 则称 ρ 为**完全可约**的.

用矩阵的语言来叙述: 称 G 的表示 (ρ, V) 为不可约的, 如在 V 中不存在基 $B = (u_1, \cdots, u_n)$ 和正整数 r, $1 \leqslant r < n$, 使得每个 $\rho_B(g)$, $g \in G$, 是形如

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} & \beta_{1,r+1} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rr} & \beta_{r,r+1} & \cdots & \beta_{rn} \\ \hline & & & \beta_{r+1,r+1} & \cdots & \beta_{r+1,n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & \beta_{n,r+1} & \cdots & \beta_{nn} \end{array}\right)$$

的矩阵.

(2.4.2) 例

(a) 因为 G 的任何表示空间的维数都是正整数, 所以 G 的次数等于 1 的表示总是不可约的. 特别, 单位表示不可约.

(b) 设 (ρ, V) 是 G 的表示. 设 U 是 V 的 $\rho(G)$ 不变子空间. 设 $B = (u_1, \cdots, u_n)$ 是 V 的 F 基使 $(u_1, \cdots, u_r)$ 是 U 的 F 基. 取 V^* 的关于 B 的对偶基 $(u_1^*, \cdots, u_n^*) : u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$. 记 U^* 为 V^* 的由 $u_1^*, \cdots, u_r^*$ 所张成的子空间, 记 (ρ^*, V^*) 为 (ρ, V) 的反轭表示, 则易见 U^* 是 $\rho^*(G)$ 不变的. 且 $U \longmapsto U^*$ 是从 V 的子表示集合到 V^* 的子表示集合上的保持表示空间包含关系的双射. 这推出: ρ 是不可约表示当且仅当 ρ^* 是不可约表示; ρ 是完全可约表示当且仅当 ρ^* 是完全可约表示.

(c) 设 $\pi : G_1 \to G_2$ 是群的满同态, ρ_i 是 G_i 的表示, $i = 1, 2$, 且 ρ_1 是 ρ_2 通过 π 的提升. 则 ρ_1 是不可约 (或完全可约) 的当且仅当 ρ_2 是不可约 (或完全可

约) 的, 特别, 当 $N \lhd G$, 且 ρ_1 与 ρ_2 是 N 的两个互相共轭的表示时, 上述结论成立.

(2.4.3) 不可约表示在给定表示中的重数 给定 G 的表示 (ρ, V). 设 (ρ, V) 的子表示序列 $(\rho_1, V_1) = (\rho, V), (\rho_2, V_2), \cdots, (\rho_r, V_r)$ 满足 $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_r \supset V_{r+1} = 0$, 且 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant r, (\rho_i)_{V_i/V_{i+1}}$ 是 G 的不可约表示, 则称该序列为表示 (ρ, V) 的一个**合成列**. $((\rho_i)_{V_i/V_{i+1}}, V_i/V_{i+1}), 1 \leqslant i \leqslant r$ 称为该合成列的**合成因子**

由群表示次数的有限性知, 表示 (ρ, V) 的合成列总是存在的. 在第三章里我们将要证明 G 的表示与群代数 $F[G]$ 的表示在实质上是一回事. 于是 G 的表示也与 $F[G]$ 模是一回事. 因此根据模论中关于合成列的 Jordan-Hölder 定理, 尽管表示 (ρ, V) 的合成列不必唯一确定, 但 (ρ, V) 的合成列的合成因子多重集在等价的意义下由 (ρ, V) 所唯一确定, 而与合成列的具体取法无关. 现在我们可定义 G 的不可约表示 η 在 ρ 中的**重数**为 η 作为 ρ 的合成因子所出现的次数. 进而, 我们可写

$$\rho \longleftrightarrow m_1\eta_1 + \cdots + m_s\eta_s, \tag{1}$$

这里 η_i 是 G 的不可约表示, m_i 是 η_i 在 ρ 中的重数. 显然, $m_i \geqslant 0$. 使 $m_i > 0$ 的不可约表示 η_i 称为 ρ 的**不可约分量**, 或简称为 ρ 的**分量**. 如另外有 G 的 F 表示 ρ' 使

$$\rho' \longleftrightarrow m_1'\eta_1 + \cdots + m_s'\eta_s, \quad \text{且满足} \quad m_i' \leqslant m_i, \forall i, \tag{2}$$

则记 $\rho' \leqslant \rho$. 特别, 当 ρ' 是不可约表示时, 记号 $\rho' \leqslant \rho$ 表明 ρ' 是 ρ 的分量.

习　题

1. 证明: 如 $\forall x \in G$, 存在 G 的不可约表示 ρ, 使得 $\rho(x) \neq 1$, 则存在 G 的完全可约的忠实表示.

2. 设 $\mathrm{char}.F = p > 0, G = \langle x \rangle$ 是 p 阶循环群. 证明域 F 上的矩阵表示 $x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可约, 但非完全可约.

3. 设 $G = \langle x \rangle$ 是素数 p 阶循环群, 设 M 是以 $\{m_0, m_1, \cdots, m_{p-1}\}$ 为基的 $\mathbb{Q}$ 向量空间, 定义 $\rho(x)$ 为

$$\rho(x)m_i = \begin{cases} m_{i+1}, & \text{如} \quad 0 \leqslant i < p-1, \\ m_0, & \text{如} \quad i = p-1. \end{cases}$$

则 ρ 是 G 的正则表示. 令 $u_0 = \sum_{i=0}^{p-1} m_i$ 与 $u_i = m_i - m_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant p-1$. 证明 $N_1 = \mathbb{Q}u_0$ 与 $N_2 = \sum_{i=1}^{p-1} \mathbb{Q}u_i$ 是 M 的不可约 G 子模且 $M = N_1 \oplus N_2$.

提示 利用多项式 $\lambda^{p-1} + \cdots + \lambda + 1$ 在域 $\mathbb{Q}$ 上不可约的事实.

4. 试证明有限阿贝尔群的不可约复表示都是一次的.

§2.5 群的表示环

为了介绍群的表示环, 我们先叙述一个关于群 G 的 F 表示的等价关系的命题. 我们规定零维 F 空间为 G 的零表示, 记作 0.

(2.5.1) 命题 设 U, V 与 W 都是 G 的 F 表示, 则以下关于表示的等价关系成立:

(a) $(U \oplus V) \oplus W \sim U \oplus (V \oplus W)$.

(b) $V \oplus U \sim U \oplus V$.

(c) $0 \oplus V \sim V \oplus 0 \sim V$.

(d) $(U \otimes V) \otimes W \sim U \otimes (V \otimes W)$.

(e) $U \otimes V \sim V \otimes U$.

(f) $U \otimes 1_G \sim 1_G \otimes U \sim U$ (注意 1_G 是 G 的单位表示).

(g) $U \otimes (V \oplus W) \sim U \otimes V \oplus U \otimes W$.

(h) $(U \oplus V)^* \sim U^* \oplus V^*$.

(i) $(U \otimes V)^* \sim U^* \otimes V^*$.

(j) $(U^*)^* \sim U$.

(k) $\mathrm{Hom}(U, V) \sim U^* \otimes V$.

(l) $\mathrm{Hom}(V, W) \sim \mathrm{Hom}(W^*, V^*) \sim (\mathrm{Hom}(W, V))^*$.

(m) $\mathrm{Hom}(V, W \oplus U) \sim \mathrm{Hom}(V, W) \oplus \mathrm{Hom}(V, U)$.

(n) $\mathrm{Hom}(V \oplus U, W) \sim \mathrm{Hom}(V, W) \oplus \mathrm{Hom}(U, W)$.

证 如将上面每个关于表示的等价符号的两边都看作 F 空间, 而将等价符号都换作关于 F 空间的同构符号, 则结论是众所周知的. 故只剩下验证所定义的 G 的作用与自左而右的自然映射相交换. 证明的细节留给读者作为练习. □

取所有有限形式和 $\sum_i n_i[V_i]$ 组成的集合, 这里 V_i 是 G 的 F 表示, $n_i \in \mathbb{Z}$. 并规定: 如 V 与 W 是等价的表示, 则 $[V] = [W]$. 记这样的集合为 $R_F(G)$ 或 $R(G)$.

在 $R(G)$ 中定义合成 $+$ 与 $\circ$ 使满足:

(a) 如 V 与 W 是 G 的二个 F 表示, 则

$$\begin{cases} [V] + [W] = [V \oplus W], \\ [V] \circ [W] = [V \otimes W]. \end{cases} \tag{1}$$

(b) $\forall \sum_i n_i[V_i], \sum_j m_j[V_j] \in R(G)$, 有

$$\begin{cases} \sum_i n_i[V_i] + \sum_j m_j[V_j] = \sum_i (n_i + m_i)[V_i], \\ \left(\sum_i n_i[V_i]\right) \circ \left(\sum_j m_j[V_j]\right) = \sum_{i,j} n_i m_j [V_i] \circ [V_j]. \end{cases} \tag{2}$$

显然, 合成 $+$ 与 $\circ$ 由条件 (a) 与 (b) 所完全确定. 由命题 (2.5.1) 可见: 这两种合成是有意义的. 特别, 由命题 (2.5.1) 的 (a),(b),(c) 知: $R(G)$ 在合成 $+$ 之下形成一个阿贝尔群; 再由命题 (2.5.1) 的 (d),(e), (f),(g) 推出: $R(G)$ 关于合成 $+$ 与 $\circ$ 成为一个交换环, 其零元素与乘法恒等元分别为 $[0]$ 与 $[1_G]$. 称 $R_F(G)$ 为群 G 的 **F 表示环**, 或简称 G 的**表示环**.

在 $R(G)$ 中定义

$$[V]^* := [V^*]. \tag{3}$$

则由命题 (2.5.1) 的 (h),(i),(j) 推出: 映射

$$[V] \longmapsto [V]^*$$

是 $R(G)$ 的二阶环自同态. 再由命题 (2.5.1)(k) 知函子 Hom 并没有引进什么新的表示. 最后可见, 命题 (2.5.1) (l) 是 (i), (j), (k) 的简单推论.

设元素 $\sum_i n_i[V_i] \in R(G)$ 的所有系数 n_i 都是正整数. 令 $W = \bigoplus_i (V_i \oplus \cdots \oplus V_i)$, 括号里是 n_i 个 V_i 的直和. 则 W 是 G 的满足等式 $[W] = \sum_i n_i[V_i]$ 的表示. $R(G)$ 的这种元素称为 G 的**实在表示**. 以 $R_F(G)^+$ (或 $R(G)^+$) 记 $R_F(G)$ 的实在表示集合. 显然, $R(G)$ 的元素都可写成二个实在表示之差: $\sum_i n_i[V_i] = [W_1] - [W_2]$, 这里 G 的表示 W_1, W_2 满足等式 $[W_1] = \sum_{i, n_i>0} n_i[V_i], [W_2] = \sum_{i, n_i<0} (-n_i)[V_i]$. 通常称 $R(G)$ 的元素为 G 的**广义表示**. 为方便起见, 我们常记 $[W_1] - [W_2]$ 为 $W_1 - W_2$.

(2.5.2) $R_{\mathbb{C}}(G)$ 上的内积 由命题 (2.5.1)(m), (n) 知: 在 $R_{\mathbb{C}}(G)$ 上存在唯一的整双线性型 (—,—) 使得对于 $V, W \in R_{\mathbb{C}}(G)^+$, 有

$$(V, W) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W). \tag{4}$$

我们要证明:(—,—) 是 $R_{\mathbb{C}}(G)$ 上的一个内积. 我们有复空间同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(V^*, W^*) &\cong \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}(V^*, W^*)) \cong \mathrm{Inv}_G((V^*)^* \otimes W^*) \\ &\cong \mathrm{Inv}_G(W^* \otimes V) \cong \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}(W, V)) \cong \mathrm{Hom}_G(W, V). \end{aligned}$$

于是为了证明 (—,—) 的对称性, 只要证明

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V,W)=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V^*,W^*).$$

由命题 (2.1.11) 知, 可选取向量空间 V (或 W) 的基 $B=(u_1,\cdots,u_n)$ (或 $C=(v_1,\cdots,v_m)$), 使得 G 的所有表示矩阵都是酉矩阵. 考虑如下定义的从 $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ 到 $\mathrm{Hom}_G(V^*,W^*)$ 内的映射: 给定 $f\in\mathrm{Hom}(V,W)$, 将 f 写成关于基 B,C 的矩阵形式 $\mathbf{f}$:

$$f\cdot(u_1,\cdots,u_n)=(v_1,\cdots,v_m)\mathbf{f}.$$

设 $B^*=(u_1^*,\cdots,u_n^*)$ (或 $C^*=(v_1^*,\cdots,v_m^*)$) 是 V^* (或 W^*) 的关于 B (或 C) 的对偶基, 则在 $\mathrm{Hom}(V^*,W^*)$ 中存在唯一的元素 f^*, 它关于基 B^*,C^* 的矩阵形式 $\mathbf{f}^*$:

$$f^*\cdot(u_1^*,\cdots,u_n^*)=(v_1^*,\cdots,v_m^*)\mathbf{f}^*$$

满足等式 $\mathbf{f}^*=\bar{\mathbf{f}}$, 这里 $\bar{\mathbf{f}}$ 为对矩阵 $\mathbf{f}$ 的系数作复共轭变换所得到的矩阵. 易证 f 是 G 不变的当且仅当 f^* 是 G 不变的. 故 $f\longmapsto f^*$ 是从 $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ 到 $\mathrm{Hom}_G(V^*,W^*)$ 内的映射. 这个映射是双射且保持加法运算, 同时对于任意实数 r, 有等式 $r(f^*)=(rf)^*$. 于是 $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ 与 $\mathrm{Hom}_G(V^*,W^*)$ 作为实向量空间是同构的, 它们作为复向量空间具有相同的维数. 这证明了 (—,—) 的对称性.

剩下要证明 (—,—) 是正定的. 为此, 我们需要一个结论:"群 G 的任何复表示都是完全可约的". 它是以后要证明的定理 (3.1.1) 的直接推论. 根据这一结论, $R_{\mathbb{C}}(G)$ 里的元素都可唯一地写成形状 $V=V_1-V_2$ 使得 $V_1,V_2\in R_{\mathbb{C}}(G)^+$ 且 V_1 与 V_2 不含公共的不可约分量. 由于对于 G 的任何表示 W, $\mathrm{Hom}_G(W,W)$ 至少含有由恒等映射的纯量倍组成的一维子空间. 故 $(V,V)=\sum_{i=1}^{2}\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V_i,V_i)\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $V=0$. 这说明 (—,—) 是正定的, 因此 (—,—) 是 $R_{\mathbb{C}}(G)$ 上的内积.

习　题

1. 请给出命题 (2.5.1) 的证明细节.

2. 令 G 为有限阿贝尔群. 试描述 $R_{\mathbb{C}}(G)$.

提示　请利用 §2.1 习题 3 与 § 2.4 习题 4 的结果, 并利用结论 "G 的任何复表示都是完全可约的".

第三章　代数表示理论的应用

研究有限群表示理论有两种主要方法: 其一是将有限维代数的结构和表示理论应用于群代数 (因有限群的表示理论与相应的群代数的表示理论实质上是一回事); 其二是应用特征标理论. 许多结果可从这两种方法中的任一种获得. 两种方法各有其优越性. 粗略地讲, 特征标理论对于处理表示论中的计算问题比较得力, 而代数理论则有利于处理表示论中的结构性问题, 从关于群表示论的文献来看, 20 世纪 70 年代中期以前的作者偏重于特征标理论的居多, 如 Serre, Issacs 等. 其特点是对读者所要求的预备知识较少, 便于初学者较快掌握并运用有关理论. 但在处理一些理论性较强的问题时, 代数理论就显示了它的优越性, 因为模论和代数理论中许多相当成熟而强有力的结果可通过群代数应用到群表示理论上来. 因此近三十年来的许多数学家如 Curtis, Reiner 等偏重于第一种方法, 当然, 这两种方法不能截然分开. 许多重要定理的推导得力于这两种方法的巧妙结合.

§3.1　群的完全可约表示

让我们先回忆一下群代数的定义 (见 (1.3.2)(c)). 设 $F[G]$ 是以 G 的元素为基的 F 空间, 则 $F[G]$ 是所有有限和 $\sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in F$ 的集合. 它关于如下定义的乘法成为 F 代数:

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h h\right)=\sum_{g,h\in G}\alpha_g\beta_h gh,\ \alpha_g,\beta_h\in F.$$

称 $F[G]$ 为 G 在 F 上的**群代数**, 或简称为 G 的群代数.

设 $(\rho, V) \in R_F(G)^+$, 则群同态 $\rho : G \to GL(V)$ 可唯一地扩充为从 $A = F[G]$ 到 $\mathrm{End}_F V$ 内的 F 代数同态

$$\sum \alpha_g g \longmapsto \sum \alpha_g \rho(g).$$

其像 A_V 是由 $\rho(G)$ 在 $\mathrm{End}_F V$ 中生成的结合子代数, 称作群 G 在 ρ 下的**包络代数**. 反之, 设 $\rho : F[G] \to \mathrm{End}_F V$ 是 $F[G]$ 的表示. 由于 $\rho(1) = 1_V$, 我们有 $\rho(g) \in GL(V), \forall g \in G$, 故由命题 (2.1.2) 知 ρ 在 G 上的限制引起 G 的一个表示. 于是, 在有限维 F 空间 V 上定义 G 的一个表示与定义相应的 $F[G]$ 表示是同一回事. 在 V 上定义 G 的表示相当于给 V 以相应的 $F[G]$ 模结构. G 的不可约表示对应于不可约 $F[G]$ 模, 而 G 的完全可约表示对应于完全可约 $F[G]$ 模. 今后我们把 G 的 F 表示与相应的 $F[G]$ 模等同起来, 不加区别.

下面的定理给出 $F[G]$ 模完全可约的一个判则.

(3.1.1) 定理 (Maschke) *设 char. $F \nmid |G|$, 则任何 $F[G]$ 模是完全可约的.*

证 设 V 是 $F[G]$ 模, W 是 V 的子模, 则 V 与 W 都可被看作 F 空间. 令 U_0 为 W 在 V 中的补空间, 即 $V = W \oplus U_0$, 令 φ 为相应的从 V 到 W 上的射影, 则 φ 是 F 线性映射. 今定义映射 $\psi : V \to W$ 如下:

$$\psi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(gv), \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

则 ψ 也是 F 线性的. 因为

$$\begin{aligned}\psi(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(ghv) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h(gh)^{-1} \varphi(ghv) = h \cdot \psi(v), \ \forall h \in G,\end{aligned}$$

所以 ψ 是 $F[G]$ 模同态.

令 $w \in W$. 有:

$$gw \in W, \quad \forall g \in G.$$

于是

$$\varphi(gw) = gw.$$

这推出 $\psi(w) = w$. 因 $\forall v \in V$, 有 $\psi(v) \in W$, 故

$$\psi(\psi(v)) = \psi(v).$$

于是 $\psi(v - \psi(v)) = \psi(v) - \psi(v) = 0$, 即 $v - \psi(v) \in \mathrm{Ker}\psi$. 令 $U = \mathrm{Ker}\psi$. 则 $v = \psi(v) + (v - \psi(v)) \in W + U$. 这推出 $V = W + U$.

最后, 如 $w \in W \bigcap U$,则 $w = \psi(w) = 0$. 于是

$$V = W \oplus U.$$

由定理 (1.4.5), 本定理得证. □

(3.1.2) 推论 *群代数 $F[G]$ 是半单的 $\Leftrightarrow$ char. $F \nmid |G|$.*

证 ($\Leftarrow$): 由定理 (3.1.1) 直接推出.

($\Rightarrow$): 设 char. $F \| |G|$. 考虑 $F[G]$ 的元素 $z = \sum\limits_{g \in G} g$. 它是非零元, 且满足

$$g'z = z = zg', \quad \forall g' \in G.$$

因此 Fz 是 $F[G]$ 的理想, 由于 char. $F \| |G|$, 我们有

$$z^2 = \sum_{g' \in G} g'z = |G|z = 0.$$

故 Fz 是 $F[G]$ 的非零幂零理想, 这推出 Rad. $F[G] \neq 0$. 因此据定理 (1.6.4), $F[G]$ 不是半单的. □

关于 $F[G]$ 模完全可约的 Maschke 定理可用 G 的矩阵表示作明显的描述. 从历史上讲, Maschke 最初正是在 $F = \mathbb{C}$ 的假定下用矩阵的形式来叙述这一定理的. 后来, Dickson 把 Maschke 定理推广到任意满足条件 char.$F \nmid |G|$ 的域 F 上.

由于 G 的表示与 $F[G]$ 模的对应关系, 上面的 Maschke 定理可用作 G 的表示的完全可约性判则, 下面我们再给出一个关于 G 的子群表示的完全可约性判则.

(3.1.3) 定理 (Clifford) *设 $H \lhd G, \rho \in \overline{\text{Irr}}_F G$. 则 ρ_H 完全可约, 且 ρ_H 的所有不可约分量都互相共轭且有相同的重数.*

证 设 V 是 ρ 的表示空间, U 是 V 的不可约 $F[H]$ 子模. 显然 $\sum\limits_{g \in G} gU$ 是 V 的含 U 的 G 不变子空间. 于是由 V 的不可约性知 $V = \sum gU$. 令 $h \in H$ 与 $y \in U$, 则

$$h(gy) = (hg)y = g(g^{-1}hg)y \in gU, \tag{2}$$

故 gU 是 H 不变的. 设 (σ, U) 与 (σ', gU) 是由 ρ 所引起的 H 的二个表示. 由 (2) 式得

$$\sigma'(h)\rho(g)y = \rho(g)({}^{g^{-1}}\sigma)(h)y.$$

由于 $y \longmapsto gy$ 是从 U 到 gU 上的 F 线性同构, σ' 与 σ 互相共轭. 于是 gU 是不可约 $F[H]$ 模. $V = \sum gU$ 是不可约 $F[H]$ 子模的和, 其每一项所对应的 H 的表

示互相共轭. 由定理 (1.4.5) 知 V 是某些 gU 的直和. 于是 ρ_H 完全可约, 且它的不可约分量互相共轭. 如 U_1 与 U_2 是同构的不可约 $F[H]$ 子模, 则 gU_1 与 gU_2 也是同构的不可约 $F[H]$ 子模. 这推出每个 $g \in G$ 置换 $F[H]$ 模 V 的齐次分支, 故 G 通过 ρ 作用在 $F[H]$ 模 V 的齐次分支的集合 S 上. 进而, 如 U 是 V 的任何不可约 $F[H]$ 子模, 则 V 的任何其它不可约 $F[H]$ 子模同构于某 gU, 所以 G 在 S 上的作用是可迁的. 这推出 V 的所有不可约分量有相同的重数. □

以上是两个关于群表示完全可约性的判别准则, 下面我们要讨论群的完全可约表示的一些性质.

设 $(\rho, V) \in R_F(G)^+$ 与 $A = F[G]$, 如 A_V 有双重中心化子性质, 则称 ρ **有双重中心化子性质**.

(3.1.4) 定理 *G 的任何完全可约表示 ρ 有双重中心化子性质.*

证 据 G 与 $F[G]$ 的表示的对应关系, 我们的结论可直接从定理 (1.7.2) 推出. □

据推论 (3.1.2), 当 char. $F \nmid |G|$ 时, $F[G]$ 是半单的, 此时, 定理 (1.7.5) 允许我们写

$$A = F[G] = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s, \tag{3}$$

这里 A_i 是形如 $A(N_i)$ 的单分支, $\overline{\mathrm{Irr}}_F A = \{N_i | 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 是不可约 A 模同构类的代表系, 进而, 如 $D_i = (\mathrm{End}_A N_i)^{\mathrm{op}}, n_i$ 为 N_i 在正则 A 模 ${}_AA$ 中出现的重数, 则 $A_i \cong M_{n_i}(D_i)$. 于是

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

令 I_i 为 A 在 A_i 中的极小非零左理想. 则由定理 (1.5.4) 知: I_i 提供 G 的一个不可约表示. I_i 与 I_j 提供 G 的等价表示当且仅当 $i = j$, G 的每个不可约表示总可从某一个 I_i 上得到, 于是 $|\overline{\mathrm{Irr}}_F G| = s$.

现在让我们来决定由 I_i 所提供的不可约表示的次数. 令 $\{e_{ij} | 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 为 $M_n(D)$ 的矩阵单元集, 即 e_{ij} 为 $M_n(D)$ 中的 (i,j) 系数等于 1, 其余系数等于 0 的矩阵, 这里 D 是可除代数. 则

$$M_n(D) = M_n(D)e_{11} \oplus \cdots \oplus M_n(D)e_{nn} \tag{4}$$

是极小非零左理想的直和分解. 这些直和项作为左 $M_n(D)$ 模相互同构, 如把 D 等同于 $M_n(D)$ 中由 D 纯量矩阵组成的子代数, 则 $M_n(D)$ 可看作 D 上以 $\{e_{ij}\}$ 为基的向量空间, 显然, $\dim_D M_n(D) = n^2$. 因

$$M_n(D)e_{ii} = De_{1i} \oplus \cdots \oplus De_{ni},$$

所以 $\dim_D M_n(D)e_{ii} = n$. 令 $d = \dim_F D$, 则有

$$\dim_D M_n(D)e_{ii} \cdot \dim_F D = nd.$$

于是, 如果 $d_i = \dim_F D_i$, 则 $\dim_F I_i = n_i d_i$, 特别, 当 F 是代数闭域时, 推论 (1.4.3) 告诉我们: $D_i = F, \forall i$. 此时有 $\dim_F I_i = n_i$.

我们把以上结论总结如下:

(3.1.5) 定理 设 $A = F[G]$ 与 char. $F \nmid |G|$. 则有:

(a) 存在 A 的关于 F 代数单分支的直和分解

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s.$$

(b) $\forall 1 \leqslant i \leqslant s$, 存在 F 上可除代数 D_i 与 $n_i \in \mathbb{N}$ 使得

$$A_i \cong M_{n_i}(D_i)$$

(c) 如果 I_i 是 A_i 的极小非零左理想, 则 I_i 提供了 G 的不可约表示 ρ_i, 且 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G = \{\rho_i | 1 \leqslant i \leqslant s\}$.

(d) 令 $\dim_F D_i = d_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant s$, 则 $\deg \rho_i = n_i d_i$. 特别, 当 F 是代数闭域时, 有 $D_i = F$ 和 $\deg \rho_i = n_i$.

我们知道: G 对 $F[G]$ 的左乘作用引起 G 的正则表示. 故由 (4) 式得到:

(3.1.6) 定理 沿用定理 (3.1.5) 的假设和记号. 则 $\rho_i \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 在 G 的正则表示中出现的重数是 n_i.

定理 (3.1.5) 告诉我们: 当 char. $F \nmid |G|$ 时, G 的不可约表示等价类的个数等于 $A = F[G]$ 的单分支 A_i 的个数 s. 我们要问: 这个数与群 G 的本身结构有怎样的关系? 换句话说, 我们希望知道这个数的群论意义. 为此, 让我们先来研究 A 的中心 $Z(A)$. 由 (3) 式与定理 (1.5.4),(1.7.5) 知:

$$Z(A) = Z(A_1) \oplus \cdots \oplus Z(A_s), \tag{5}$$

这里, $Z(A_i) \cong Z(M_{n_i}(D_i)) \cong Z(D_i)$ 是域, 它也是半单交换代数 $Z(A)$ 的单分支, 所以 s 等于 $Z(A)$ 的单分支个数. 现在让我们来确定 $Z(A)$ 的 F 基.

(3.1.7) 命题 设 $G = \mathscr{C}_1 \bigcup \mathscr{C}_2 \bigcup \cdots \bigcup \mathscr{C}_r$ 是 G 的共轭类分解, 这里 $\mathscr{C}_1 = \{1\}$. 令 K_i 为 $\mathscr{C}_i$ 的类和 $\sum\limits_{g \in \mathscr{C}_i} g$. 则 $(K_1, \cdots, K_r)$ 是 $Z(F[G])$ 的 F 基.

证 我们有

$$h^{-1}K_i h = \sum_{g \in \mathscr{C}_i} h^{-1}gh = \sum_{g \in \mathscr{C}_i} g = K_i, \quad \forall h \in G, 1 \leqslant i \leqslant r,$$

故 K_i 与 G 的每个元素相交换. 从而 K_i 也与 $F[G]$ 的每个元素相交换, 即 $K_i \in Z(F[G])$. 反之, 设 $K = \sum_{g\in G} \gamma_g g \in Z(F[G])$, 这里 $\gamma_g \in F$, 则由

$$h^{-1}Kh = \sum_{g\in G} \gamma_g h^{-1}gh = \sum_{g\in G} \gamma_{hgh^{-1}} g$$

推出
$$\gamma_{hgh^{-1}} = \gamma_g, \quad \forall h \in G,$$
即在表达式 $K = \sum \gamma_g g$ 中属于 G 的同一共轭类的二个元素 g, g' 的系数 $\gamma_g, \gamma_{g'}$ 相等, 故 K 是 $K_1, \cdots, K_r$ 的 F 线性组合. 显然, $K_1, \cdots, K_r$ 是 F 线性无关的, 因此 $(K_1, \cdots, K_r)$ 形成 $Z(F[G])$ 的 F 基. □

根据命题 (3.1.7) 与分解式 (5), 我们有

$$r = \dim_F Z(A) = \sum_{i=1}^{s} \dim_F Z(A_i) \geqslant s.$$

于是 $r = s$ 当且仅当 $Z(A_i) = F$, $\forall i$, 由于 $Z(A_i)$ 是 F 上有限次扩域. 一旦 F 为代数闭域, 所有的 $Z(A_i)$ 便都等于 F. 此时, G 的不可约表示等价类的个数等于 G 的共轭类的个数.

(3.1.8) 定理 *设群 G 与代数闭域 F 满足条件 char. $F \nmid |G|$. 令 s 为 G 的共轭类个数, 则*

(a) $|\overline{\mathrm{Irr}}_F G| = s$.

(b) *如* $\overline{\mathrm{Irr}}_F G = \{\rho_1, \cdots, \rho_s\}, n_i = \deg \rho_i$, *则*

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} n_i^2.$$

证 (a) 已证实.

(b) 可由推论 (3.1.2) 与 (1.7.6) 导出. □

(3.1.9) 例

(a) 设 $G = \langle z \rangle$ 是由元素 z 生成的 n 阶循环群, 则 $A = \mathbb{C}[G]$ 是 n 个 $\mathbb{C}$ 的直和, 于是 $|\overline{\mathrm{Irr}} G| = n$. 每个 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}} G$ 有次数 1. 它们所对应的矩阵表示是

$$z \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi i r/n}),$$

这里 $(\mathrm{e}^{2\pi i r/n})$ 是 1×1 矩阵, $i = \sqrt{-1}$ 和 $r \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

(b) 设 $G = D_n = \langle r, s | r^n = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle$ 是二面体群. D_n 的元素是 $r^k, r^k s, 0 \leqslant k \leqslant n-1$. 我们有关系式 $sr^k = r^{-k}s$. 于是 $(r^k s)^2 = 1$, D_n 中形如 $r^k s$ 的 n 个元素都有阶数 2. 由关系式 $r^k r^l = r^{k+l}, r^k(r^l s) = r^{k+l}s, (r^l s)r^k = r^{l-k}s$

与 $(r^k s)(r^l s) = r^{k-l}$ 易见: 如 $n = 2\nu + 1$, $\nu \geqslant 1$, 则存在 $\nu + 2$ 个共轭类, 其代表元是 $1, r^k, 1 \leqslant k \leqslant \nu, s$; 如 $n = 2\nu$, $\nu \geqslant 1$, 则存在 $\nu + 3$ 个共轭类, 其代表元是 $1, r^k, 1 \leqslant k \leqslant \nu, s, rs$. 另一方面, G 在 $\mathbb{C}$ 上不等价的不可约矩阵表示如下:

(i) $n = 2\nu + 1$, $\nu \geqslant 1$.

ρ_1, 单位表示.

ρ_2, 次数等于 1 的矩阵表示, 其满足: $r \mapsto (1), s \mapsto (-1)$.

$\sigma_l, 1 \leqslant l \leqslant \nu$, 次数等于 2 的矩阵表示, 其满足:

$$r \mapsto \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

这里 $\omega = e^{2\pi i/n}$.

(ii) $n = 2\nu, \nu \geqslant 1$.

ρ_1, 单位表示.

ρ_2, 次数等于 1 的矩阵表示, 其满足: $r \mapsto (1), s \mapsto (-1)$.

ρ_3, 次数等于 1 的矩阵表示, 其满足: $r \mapsto (-1), s \mapsto (1)$.

ρ_4, 次数等于 1 的矩阵表示, 其满足: $r \mapsto (-1), s \mapsto (-1)$.

$\sigma_l, 1 \leqslant l \leqslant \nu - 1$, 如同 (6) 式.

易验证上述表示都不可约且互不等价, 它们构成 D_n 的不可约表示等价类的代表系, 当 $n = 2\nu + 1$ 时, $1 + 1 + \nu \cdot 2^2 = 2(2\nu + 1) = 2n$; 当 $n = 2\nu$ 时, $4 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2^2 = 4\nu = 2n$.

习　　题

1. 设 G_1 与 G_2 是二个群, $G = G_1 \times G_2$. 证明: 存在 F 代数同构: $F[G_1 \times G_2] \cong F[G_1] \otimes_F F[G_2]$.

2. 验证 Maschke 定理的如下推广: 令 ρ 为 G 的表示, $H \lhd G$. 设 char. $F \nmid [G : H]$. 证明: 如 ρ_H 完全可约, 则 ρ 也完全可约.

3. 对于有限维 F 空间 V, 定义射影线性群 $PGL(V)$ 为 $GL(V)/F^*$, 这里 F^* 是由 F 的非零元组成的乘法群, 其等同于 $GL(V)$ 中由所有纯量矩阵组成的乘法群. 称群同态 $\rho : G \to PGL(V)$ 为 G 的**射影表示**. $\forall g \in G$, 令 $\mu(g)$ 为陪集 $\rho(g) \in PGL(V)$ 在 $GL(V)$ 中的代表元, 则 $\mu(g_1 g_2) = \gamma_{g_1, g_2} \mu(g_1) \mu(g_2)$, 这里 $\gamma_{g_1, g_2} \in F^*$. 试定义射影表示的子表示与射影表示的完全可约性, 并证明关于射影表示的类似于 Maschke 完全可约性定理的结果.

§3.2 群表示的分裂域

给定扩域 E/F. 我们要考虑群的不可约 E 表示与不可约 F 表示之间的联系.

在本节里, 当我们谈及群 G (或群代数 $F[G]$) 的表示 ρ 时, 总假定已选定了 ρ 的表示空间的一组基 B. 我们把 ρ 与矩阵表示 ρ_B 等同起来, 于是 $\forall g\in G$, 我们将用术语 " $\rho(g)$ 的矩阵 " 或 " 矩阵 $\rho(g)$ " 来称呼 $\rho_B(g)$, 尽管 $\rho(g)$ 的矩阵依赖于基 B 的选取, 但在等价的意义上唯一确定.

设 $\rho\in R_F(G)^+$, 则 ρ 把 G 映到 F 上可逆矩阵群内, 故 ρ 也把 G 映到 E 上可逆矩阵群内. 我们可把 ρ 看作为 G 的 E 表示, 记号 ρ^E 表明我们把 ρ 看作 E 表示. 如 ρ_1 与 ρ_2 是等价的 F 表示, 则 ρ_1^E 与 ρ_2^E 必是等价的 E 表示. 如 ρ 对应于 $F[G]$ 模 V, 则 $V^E := E\otimes_F V$ 便是 ρ^E 所对应的 $E[G]$ 模. 显然

$$\deg\rho=\dim_F V=\dim_E\rho^E=\deg\rho^E.$$

G 的 F 表示 ρ 可线性地扩充为 $F[G]$ 的表示, 后者仍记作 ρ. 于是 $E[G]$ 的表示 ρ^E 是 $F[G]$ 的表示 ρ 的扩充. 根据 §3.1 一开头的讨论, 作为 G 的 F 表示的 ρ 与作为 $F[G]$ 的表示的 ρ 可等同起来, 故这种记法不会引起混乱, 于是 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 也可被看作 $F[G]$ 的不可约表示等价类的代表系.

如 ρ^E 不可约, 则 ρ 也不可约. 但反之不一定对, 当 ρ 不可约时, ρ^E 仍可能是可约的.

(3.2.1) 例 设 $G=\langle g\rangle$ 是 4 阶循环群, $F=\mathbb{R}$. 我们有二次 $\mathbb{R}$ 表示 (ρ,V) 使 $\rho(g)$ 关于 V 的基 $B=(u,v)$ 的矩阵为

$$\rho_B(g)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

因为该矩阵的特征多项式是 λ^2+1, 所以 ρ 是 G 的不可约 $\mathbb{R}$ 表示. 现考虑 $\mathbb{C}$ 表示 $\rho^{\mathbb{C}}$. $V^{\mathbb{C}}$ 有基 $C=(z=u+iv, w=u-iv)$,

$$\rho^{\mathbb{C}}(g)z=\rho(g)u+i\rho(g)v=-v+iu=iz,$$
$$\rho^{\mathbb{C}}(g)w=\rho(g)u-i\rho(g)v=-v-iu=-iw.$$

于是 $\mathbb{C}z$ 与 $\mathbb{C}w$ 是 $\rho^{\mathbb{C}}(G)$ 不变子空间, 不可约表示 $\rho^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}z}$ 与 $\rho^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}w}$ 不等价.

(3.2.2) 定义 设 $\rho\in R_F(G)^+$. 如对于 F 的每个扩域 E, ρ^E 都不可约, 则称 ρ 为**绝对不可约表示**.

(3.2.3) 定理 设 $\rho\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 与 $\deg\rho=n$, 则下列条件等价:

(a) ρ 是绝对不可约表示.

(b) 对于 F 的每个有限次扩域, ρ^E 不可约.

(c) $\rho(G)$ 在矩阵环 $M_n(F)$ 内的中心化子由纯量矩阵组成.

(d) $\rho(F[G])=M_n(F)$.

证 (a)⇒(b): 显然.

(b)⇒(c): 设 $x \in M_n(F)$ 满足:

$$x\rho(g) = \rho(g)x, \forall g \in G.$$

设 E/F 是有限次扩域使 E 含 x 的特征值 λ. 因为 ρ^E 是 $E[G]$ 的不可约表示, 又因 $x - \lambda 1$ 是奇异矩阵, 它与所有的 $\rho(g), g \in G$, 相交换. 故由引理 (1.4.2) 知 $x - \lambda 1 = 0$. 这推出 (c).

(c)⇒(d): 由定理 (1.7.2) 推出.

(d)⇒(a): 设域 L 满足 $L \supseteq F$. 因每个 $x \in M_n(L)$ 是 $M_n(F)$ 中矩阵的 L 线性组合. 故 $\rho(L[G]) = M_n(L)$. 这说明 ρ^L 不可约. □

(3.2.4) 定义 *如 G 的每个不可约 F 表示是绝对不可约的, 则称 F 为 G 的**表示的分裂域**, 或简称为 G 的**分裂域**.*

根据定义 (3.2.4) 与定理 (3.2.3), 当 char $F \nmid |G|$ 时, F 为 G 的分裂域当且仅当 $F[G]$ 的每个单分支是 F 上分裂中心单代数 (见定义 (1.10.1)), 即 $F[G]$ 有如下形状的单分支直和分解:

$$F[G] \cong M_{n_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(F).$$

(3.2.5) 推论 *如 F 是代数闭域, 则 F 是任何群的分裂域.*

证 因 F 没有非平凡的有限次扩域, 所以对于任何群 G 的每个不可约 F 表示, 定理 (3.2.3) 的条件 (b) 成立. □

设 F 是 G 的分裂域, $E \supseteq F$. 则 G 的每个不可约 F 表示 ρ 决定了不可约 E 表示 ρ^E. 设 $\overline{\text{Irr}}_F G = \{\rho_i\}$. 我们要证 $\overline{\text{Irr}}_E G = \{\rho_i^E\}$.

设 V 是 $F[G]$ 模. 如 V 有子模列

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = \{0\}$$

使每个 V_{i-1}/V_i 是不可约模, 则称该子模列为 V 的**合成列**, 称 V_{i-1}/V_i 为 V 的**合成因子**. 关于 F 代数上模的 Jordan-Hölder 定理断定: V 的任意二个合成列的合成因子多重集在等价的意义下是相同的. 作为 V 的合成因子而出现的不可约模 W 称为 V 的**不可约分量**, 或简称为 V 的**分量**.

上面的定义也可用矩阵表示的语言来叙述, 如 ρ 是 G 的对应于 $F[G]$ 模 V 的 F 表示, 则 ρ 等价于如下形式的矩阵表示 τ:

$$\tau(g) = \begin{pmatrix} \tau_1(g) & & & * \\ & \tau_2(g) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_n(g) \end{pmatrix}, \ \forall g \in G,$$

这里 τ_i 是对应于合成因子 V_{i-1}/V_i 的不可约表示, 故它也是 ρ 的不可约分量.

由 Jordan-Hölder 定理可知: 表示 ρ 只有有限多个不可约分量.

(3.2.6) 推论

(a) 每个 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 是正则 F 表示 ρ_{reg} 的商表示.

(b) $|\overline{\mathrm{Irr}}_F G| < \infty$.

(c) 如 $E \supseteq F$ 与 $\tau \in \overline{\mathrm{Irr}}_E G$, 则存在某 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 $\tau \leqslant \rho^E$.

证 (a) 是引理 (1.5.3) 的直接推理. (b) 可从 (a) 与 Jordan-Hölder 定理推出. 易知 ρ_{reg}^E 是 G 的正则 E 表示, 故 $\tau \leqslant \rho_{\mathrm{reg}}^E$. 于是必存在 ρ_{reg} 的不可约分量 ρ 使 $\tau \leqslant \rho^E$. 显然, $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$. □

(3.2.7) 引理 设 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G = \{\rho_i\}$. 令

$$I_i = \{x \in F[G] \mid \rho_i(x) = 0\}, \quad \forall i.$$

则 $\mathrm{Rad}.F[G] = \bigcap_i I_i$. 特别, 当 $F[G]$ 是半单时有 $\bigcap_i I_i = 0$.

证 记 $I = \bigcap_i I_i$ 与 $N = \mathrm{Rad}.F[G]$. 则 I 是 $F[G]$ 的理想. 正则 $F[G]$ 模 ${}_AA = F[G]$ 有合成列:

$${}_AA = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_{t+1} = 0,$$

这里 $\overline{M}_i = M_i/M_{i+1}$ 是不可约 $F[G]$ 模, $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant t$. 因为 I 零化每个 $\overline{M}_i$, 故 $IM_i \subseteq M_{i+1}, \forall i$, 这推出 $I^t \cdot {}_AA = 0$. 由于 $1 \in {}_AA$, 我们有 $I^t = 0$. 这推出 $I \subseteq N$. 反之, 因 N 是 $F[G]$ 的幂零理想, 所以存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $N^n = 0$. 为了证明 $N \subseteq I$, 只要证明: $\forall i$, 有 $N\overline{M}_i = 0$. 如该结论不成立, 则存在某 $j, 1 \leqslant j \leqslant t$, 使 $N\overline{M}_j \neq 0$. 由 $\overline{M}_j$ 的不可约性知 $N\overline{M}_j = \overline{M}_j$. 于是 $0 = N^n\overline{M}_j = \overline{M}_j$. 这是不可能的. 于是我们有 $N = I$. 余下的结论可从定理 (1.6.4) 推出. □

下述结论对于建立 G 的 F 表示的等价性很有用.

(3.2.8) 定理 设 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G, a \in F[G]$. 则存在 $b \in F[G]$ 使 $\rho(b) = \rho(a)$, 且 $\forall \tau \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G, \tau \nsim \rho$, 有 $\tau(b) = 0$.

证 设 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G = \{\rho_i\}$. 令 $I_i = \{x \in F[G] | \rho_i(x) = 0\}$. 由引理 (3.2.7) 知: $N = \bigcap_i I_i$ 是 $F[G]$ 的根基. 令 $A = F[G]/N$, 则每个 ρ_i 可被当作 F 代数 A 的表示, 且它们两两不等价. 特别, 由定理 (1.6.4) 知 A 是半单的. 再由定理 (1.5.4) 知: A 有极小理想 M_i 使 $\rho_j(M_i) = 0, \forall j,\ j \neq i$, 且

$$\rho_i(M_i) = \rho_i(A) = \rho_i(F[G]).$$

现设 $\rho=\rho_1$, 可取 $b\in M_1$ 使 $\rho(b)=\rho(a)$. 此时显然有

$$\rho_j(b)=0,\ \forall j\geqslant 2.$$ □

(3.2.9) 推论 *设 $\rho,\tau\in\overline{\mathrm{Irr}}_FG, E$ 是 F 的扩域, 且 ρ^E 与 τ^E 有公共不可约分量, 则 $\rho\sim\tau$.*

证 设 ζ 是 ρ^E 与 τ^E 的公共不可约分量. 设 $\rho\nsim\tau$. 把 ρ 与 τ 看作 $F[G]$ 的表示. 由定理 (3.2.8), 可取 $b\in F[G]$ 使 $\rho(b)=\rho(1)$ 与 $\tau(b)=0$. 因 $\rho^E(b)$ 是恒等矩阵, 故 $\zeta(b)$ 也是恒等矩阵, 另一方面, 由 $\tau^E(b)$ 是零矩阵推出 $\zeta(b)$ 也是零矩阵. 这个矛盾说明 $\rho\sim\tau$. □

推论 (3.2.9) 告诉我们: 推论 (3.2.6)(c) 中的表示 ρ 在等价意义下唯一存在.

(3.2.10) 推论 *设 F 是 G 的分裂域. $\overline{\mathrm{Irr}}_FG=\{\rho_i\}$. 设 E 是 F 的扩域, 则 E 也是 G 的分裂域, 且 $\overline{\mathrm{Irr}}_FG=\{\rho_i^E|1\leqslant i\leqslant n\}$.*

证 $\forall i$, ρ_i 都是绝对不可约的, 所以 ρ_i^E 也都绝对不可约. 由推论 (3.2.9) 知: $\forall i,\rho_i^E$ 两两不等价. 最后, 设 $\eta\in\overline{\mathrm{Irr}}_EG$. 由推论 (3.2.6)(c), 存在某 i 使 η 是 ρ_i^E 的不可约分量. 因 ρ_i^E 不可约, 这推出 $\eta\sim\rho_i^E$. □

至此, 我们对于扩域 E/F 建立了群的不可约 E 表示与不可约 F 表示之间的联系. 下面给出一个关于分裂域的子域是分裂域的判别准则.

(3.2.11) 定理 *设 E 是 G 的分裂域, F 是 E 的子域, 则 F 是 G 的分裂域当且仅当 G 的每个不可约 E 表示等价于某 η^E, 这里 $\eta\in\overline{\mathrm{Irr}}_FG$.*

证 $(\Rightarrow)$ 设 F 是 G 的分裂域, 由推论 (3.2.10) 知 G 的每个不可约 E 表示有所要求的形式.

$(\Leftarrow)$ 设 $\tau\in\overline{\mathrm{Irr}}_FG$ 使 ρ 是 τ^E 的不可约分量. 由假设知存在 $\eta\in\overline{\mathrm{Irr}}_FG$ 使 $\eta^E\sim\rho$. 于是 η^E 与 τ^E 有公共的不可约分量. 再由推论 (3.2.9) 知 $\eta\sim\tau$. 于是 τ^E 是绝对不可约的. 由定理 (3.2.3)(a)、(c) 推出: 与每个 $\tau(g)$, $g\in G$, 相交换的 F 矩阵是纯量矩阵. 再由定理 (3.2.3)(c), (a) 知 τ 绝对不可约. □

(3.2.12) 命题 *设 $F\subseteq\mathbb{C}$. 我们有如下等价的叙述:*

(a) F 是 G 的分裂域.

(b) $\forall(\rho,V)\in R_{\mathbb{C}}(G)^+$, 存在 V 的 $\mathbb{C}$ 基 B 使 $\rho_B(g)\in M_n(F),\forall g\in G$.

(c) $\forall(\rho,V)\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G$, 存在 V 的 $\mathbb{C}$ 基 B 使 $\rho_B(g)\in M_n(F),\forall g\in G$.

(d) G 的任何不可约复矩阵表示都相似于它在 F 上的一个矩阵表示.

这里 (b) 与 (c) 中的整数 n 都等于 $\deg\rho$.

证 由推论 (3.2.5) 知 $\mathbb{C}$ 是 G 的分裂域, 于是 (a) 与 (c) 的等价性可从定理

(3.2.11) 推出. (b) 与 (c) 的等价性是由于 G 在特征数为零的域上表示的完全可约性. 而 (d) 不过是 (c) 的矩阵表述. □

(3.2.13) 命题 *给定域 F 与群 G, 存在 F 的有限次扩域 E 使 E 是 G 的分裂域.*

证 设 $\overline{F}$ 是 F 的代数闭域. 由推论 (3.2.5) 知: $\overline{F}$ 是 G 的分裂域、设 $\{\rho_i\}_{i\in I} = \overline{\mathrm{Irr}}_{\overline{F}}G$. 由推论 (3.2.6)(b) 知 $|\{\rho_i\}| < \infty$. 故只有有限多个 $\overline{F}$ 中元素作为矩阵 $\rho_i(g), \forall g \in G, i \in I$ 的系数而出现, 这些元素在 F 上生成的域 E 是 F 的有限次扩域. 由于每个 $\rho_i, i \in I$, 可被看作 G 的 E 表示, 据定理 (3.2.11) 知 E 是 G 的分裂域. □

习 题

1. 设 $\rho : A \to M_d(F)$ 是 F 代数 A 的 F 表示. 证明: ρ 是 A 的绝对不可约表示 $\Leftrightarrow \dim_F \rho(A) = d^2$.

2. 令 $k = \mathrm{char}.\ F, Q_2$ 为阶数等于 8 的广义四元数群.

(a) 如 $k \neq 2$, 则 Q_2 有唯一的次数大于 1 的不可约 F 表示.

(b) 如 $k \neq 0$, 则 F 是 Q_2 的分裂域.

(c) 如 $k = 0$, 则 F 是 Q_2 的分裂域当且仅当 -1 是 F 的二个平方元的和.

3. 设 F 的扩域 E 是 G 的分裂域. 则是否一定存在分裂域 K 使 $F \subseteq K \subseteq E$ 与 $[K : F] < \infty$? 请分别对 $\mathrm{char}.\ F = 0$ 或 $\neq 0$ 两种情形考虑.

提示 考虑 $F = \mathbb{Q}, E = \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{C}$ 与 $G = Q_4$ 的情形, 这里 α, β 是适当的超越元素.

4. 设 $\rho \in R_F(G)^+$. 设存在 F 的扩域 E 使 ρ^E 完全可约. 证明: ρ 完全可约.

提示 考虑 $\rho(\mathrm{Rad}.F[G])$. 然后利用下述结果: 令 M 为 $F[G]$ 模. 则 M 完全可约当且仅当 $(\mathrm{Rad}.F[G])M = 0$. 该结果可从定理 (1.6.4) 推出.

5. 设 ρ 是 G 的完全可约 F 表示, $E \supseteq F$. 证明 ρ^E 完全可约.

注 类似的结论对于非群代数的代数一般不成立.

6. 设 $G = \langle x \rangle$ 是 n 阶循环群. 对于 n 的每个正因子 d, 令 $\Phi_d(X)$ 为 d 次分圆多项式, ζ_d 为 $\mathbb{Q}$ 上 d 次单位原根 (见 §1.2).

(a) 证明: 群代数 $\mathbb{Q}[G]$ 有如下的关于单分支的 Wedderburn 分解 (见定理 (1.5.4)):

$$\mathbb{Q}[G] \cong \bigoplus_{d|n} \mathbb{Q}[X]/(\Phi_d(X)) \cong \bigoplus_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d).$$

(b) 证明: $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ 是群 G 的分裂域.

(c) 确定集合 $\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{Q}[\zeta_n]}(G)$.

提示 先证明 $\mathbb{Q}$ 代数同构 $\mathbb{Q}[G] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$ 和等式 $X^n - 1 = \Pi_{d|n}\Phi_d(X)$, 这里 X 是域 $\mathbb{Q}$ 上不定元. 再证明 $\mathbb{Q}$ 代数同构 $\mathbb{Q}[X]/(X^n - 1) \cong \bigoplus_{d|n} \mathbb{Q}[X]/(\Phi_d(X))$ 和

$\mathbb{Q}[X]/(\Phi_d(X)) \cong \mathbb{Q}(\zeta_d)$.

7. 由有限交换群的结构定理知: 每个有限交换群都同构于有限个循环群的直积. 利用该结果将习题 6 的结果推广到有限交换群 (提示: 参见 §3.1, 习题 1).

§3.3 对称群的不可约表示

现在来考虑如何确定给定群 G 的群代数 $F[G]$ 的结构问题. 如果 char. $F \nmid |G|$, 则这相当于确定 G 的不可约 F 表示的等价类的一个代表系, 或简单地讲, 确定 G 的所有不可约 F 表示. 处理这个问题一般来讲是困难的. 但当 G 是对称群 S_n 时这个问题已被 Frobenius 与 A.Young 解决. 我们将按照 J.von.Neumann 的方式 (见 van der Waerden 的 "代数学" 卷 2 的第 246 页) 来介绍这个结果.

熟知 S_n 的共轭类个数等于 n 的划分的个数 $p(n)$. 记 Λ_n 为 n 的划分的集合. 如 $\{r_1, r_2, \cdots, r_h\} \in \Lambda_n$ (即 $r_i \geqslant 1$ 与 $\sum_{i=1}^{h} r_i = n$), 则置换的集合

$\{(i_1 i_2 \cdots i_{r_1})(j_1 j_2 \cdots j_{r_2}) \cdots (k_1 k_2 \cdots k_{r_h}) | \{i_1, \cdots, i_{r_1}, j_1, \cdots, j_{r_2}, \cdots, k_1, \cdots, k_{r_h}\} = \{1, 2, \cdots, n\}\}$ 形成 S_n 的一个共轭类. S_n 的每个共轭类都可通过这种方式得到. 对于划分 $\alpha = \{r_1, r_2, \cdots, r_h\} \in \Lambda_n$, 我们总假定 $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_h$. 令 $\beta = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \in \Lambda_n$. 记 $\alpha > \beta$, 如存在 $t \geqslant 1$ 使得 $r_i = s_i, \forall i < t$ 与 $r_t > s_t$, 这给出了集合 Λ_n 上的一个全序. 每个划分 $\alpha = \{r_1, r_2, \cdots, r_h\}$ 对应一个 Young 图:

r_1 个方格

r_2 个方格

....

r_h 个方格

把数 $1, 2, \cdots, n$ 以某种方式分别填入以上 Young 图 (每格各填入一个数), 就得到一些型 α 的 Young 表 $D_\alpha, E_\alpha, \cdots$, 例如

$$D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 4 & \\ \cline{1-2} 2 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{1}$$

是型 $\alpha = \{3, 2, 1\}$ 的一个 Young 表.

如 $D (= D_\alpha)$ 是一个 Young 表, S_n 通过置换 D 的格中的数作用于 Young 表的集合. 定义 D 的**行置换群** $R(D)$ 为 S_n 的由所有保持 D 的同一行的数的集合不

变的置换组成的子群. 于是对于 (1) 中的 Young 表 $D, R(D) = \{1, (13), (16), (36), (136), (163), (45), (13)(45), (16)(45), (36)(45), (136)(45), (163)(45)\}$. 类似地, 定义 D 的列置换群 $C(D)$ 为 S_n 的由所有保持 D 的同一列的数的集合不变的置换组成的子群.

设 D_α 是型 α 的一个 Young 表, $\sigma \in S_n$. 令 σD_α 为以 σ 置换 D_α 的格中数字而得到的新 Young 表. 显然, 对于每一个型 α 的 Young 表 E_α, 必存在某 $\sigma \in S_n$ 使 $E_\alpha = \sigma D_\alpha$. 我们有

$$R(\sigma D_\alpha) = \sigma R(D_\alpha)\sigma^{-1}, \quad C(\sigma D_\alpha) = \sigma C(D_\alpha)\sigma^{-1}.$$

给定 Young 表 D, 定义群代数 $F[S_n]$ 的元素如下:

$$\begin{gathered} S_D = \sum_{\sigma \in R(D)} \sigma, \quad A_D = \sum_{\tau \in C(D)} (\mathrm{sg}\tau)\tau, \\ F_D = A_D S_D = \sum_{\substack{\sigma \in R(D) \\ \tau \in C(D)}} (\mathrm{sg}\tau)\tau\sigma \end{gathered} \tag{2}$$

这里 sg 是 S_n 的符号表示, 即

$$\mathrm{sg}\tau = \begin{cases} 1, & \text{如}\tau\text{是偶置换}, \\ -1, & \text{如}\tau\text{是奇置换}. \end{cases}$$

显然, $S_D \neq 0 \neq A_D$. 今断言: $F_D \neq 0$. 这因为: $R(D) \bigcap C(D) = \{1\}$. 故如 $\sigma_1, \sigma_2 \in R(D), \tau_1, \tau_2 \in C(D)$ 满足 $\tau_1\sigma_1 = \tau_2\sigma_2$, 则 $\sigma_2\sigma_1^{-1} = \tau_2^{-1}\tau_1$. 于是 $\sigma_1 = \sigma_2, \tau_1 = \tau_2$. 因此出现在 F_D 的表达式中的积 $\tau\sigma$ 都是互异的. 这推出 $F_D \neq 0$.

由于 $\forall \rho \in S_n, R(\rho D) = \rho R(D)\rho^{-1}$ 与 $C(\rho D) = \rho C(D)\rho^{-1}$ 以及 $\mathrm{sg}(\rho\tau\rho^{-1}) = \mathrm{sg}\tau$, 我们有 $S_{\rho D} = \rho S_D \rho^{-1}, A_{\rho D} = \rho A_D \rho^{-1}$ 与 $F_{\rho D} = \rho F_D \rho^{-1}$. 又, 如果 $\sigma \in R(D)$ 与 $\tau \in C(D)$, 则由 (2) 式得到

$$\sigma S_D = S_D = S_D\sigma, \quad \tau A_D = (\mathrm{sg}\tau)A_D = A_D\tau. \tag{3}$$

关于元素 S_D, A_D 与 F_D 的主要性质可从以下引理推得.

(3.3.1) 引理 *设 $\alpha, \beta \in \Lambda_n$ 满足 $\alpha \geqslant \beta$. D_α 与 E_β 是相应型的 Young 表. 设任何位于 D_α 的同一行的二个数必位于 E_β 的不同列. 则 $\alpha = \beta$, 且存在某 $\sigma \in R(D_\alpha)$ 与 $\tau \in C(D_\alpha)$ 使得 $E_\alpha = \sigma\tau D_\alpha$.*

证 根据条件可知: 位于 D_α 的第一行的数的个数大于或等于位于 E_β 的第一行的数的个数. 如前者大于后者, 则由于 E_β 的列的个数等于 E_β 的第一行的数的个数. 在 D_α 的第一行里存在二个数它们位于 E_β 的同一列, 这与条

件矛盾. 于是 D_α 与 E_β 的第一行含有相同个数的数. 又, 存在 E_β 的列置换 τ_1' 使得 $\tau_1'E_\beta$ 的第一行的数的集合等于 D_α 的第一行的数的集合. 其次注意 D_α 的第二行中的数位于 $\tau_1'E_\beta$ 的相异的列且不位于 $\tau_1'E_\beta$ 的第一行. 这推出 D_α 与 $\tau_1'E_\beta$ 的第二行含有相同个数的数. 于是 D_α 与 E_β 的第二行含有相同个数的数, 且存在 $\tau_2' \in C(\tau_1'E_\beta) = C(E_\beta)$ 使得 D_α 与 $\tau_2'\tau_1'E_\beta$ 的第 i 行 $(i = 1, 2)$ 的数的集合相同. 依此类推, 最后可证 $\beta = \alpha$ 且存在 $\tau' \in C(E_\alpha)$ 使得 D_α 与 $\tau'E_\beta$ 的第 i 行 $(i = 1, 2, \cdots)$ 的数的集合都相同. 于是存在 $\sigma \in R(D_\alpha)$ 使得 $\sigma D_\alpha = \tau'E_\alpha$. 令 $\tau' \in C(E_\alpha) = C(\tau'E_\alpha) = C(\sigma D_\alpha) = \sigma C(D_\alpha)\sigma^{-1}$. 故 $\tau' = \sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}, \tau^{-1} \in C(D_\alpha)$ 与 $\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}E_\alpha = \sigma D_\alpha$. 因此 $E_\alpha = \sigma\tau D_\alpha$. □

现设 $\alpha > \beta$, 则由引理 (3.3.1) 推出: 存在二个相异数 i, j, 它们位于 D_α 的同一行与 E_β 的同一列. 如 $\pi = (ij)$, 则 $\pi \in R(D_\alpha)$. 于是由 (3) 式知: $\pi S_{D_\alpha} = S_{D_\alpha} = S_{D_\alpha}\pi$ 与 $\pi A_{E_\beta} = -A_{E_\beta} = A_{E_\beta}\pi$. 于是

$$S_{D_\alpha}A_{E_\beta} = (S_{D_\alpha}\pi)A_{E_\beta} = S_{D_\alpha}(\pi A_{E_\beta}) = -S_{D_\alpha}A_{E_\beta},$$
$$A_{E_\beta}S_{D_\alpha} = A_{E_\beta}(\pi S_{D_\alpha}) = (A_{E_\beta}\pi)S_{D_\alpha} = -A_{E_\beta}S_{D_\alpha}.$$

故 $S_{D_\alpha}A_{E_\beta} = 0 = A_{E_\beta}S_{D_\alpha}$. 如果 $\rho \in S_n$, 则 $S_{\rho D_\alpha} = \rho S_{D_\alpha}\rho^{-1}$. 因为 $S_{\rho D_\alpha}A_{E_\beta} = 0 = A_{E_\beta}S_{\rho D_\alpha}$, 所以 $S_{D_\alpha}\rho^{-1}A_{E_\beta} = 0, A_{E_\beta}\rho S_{D_\alpha} = 0$. 于是

$$S_{D_\alpha}F[S_n]A_{E_\beta} = 0 = A_{E_\beta}F[S_n]S_{D_\alpha}, \quad 如 \quad \alpha > \beta. \tag{4}$$

(3.3.2) 引理 *元素 $a \in F[S_n]$ 满足等式*

$$\tau a\sigma = (\text{sg } \tau)a, \quad \forall\sigma \in R(D) 与 \tau \in C(D) \tag{5}$$

当且仅当存在某 $\gamma \in F$ 使得 $a = \gamma F_D$.

证 我们有 $F_D\sigma = A_DS_D\sigma = A_DS_D = F_D, \tau F_D = \tau A_DS_D = (\text{sg}\tau)A_DS_D = (\text{sg}\tau)F_D$. 于是任何 $a = \gamma F_D, \gamma \in F$, 满足条件 (5). 其次设 $a = \sum\limits_{\rho\in S_n}\gamma_\rho\rho$ 满足条件 (5), 则

$$\gamma_\rho = (\text{sg}\tau)\gamma_{\tau\rho\sigma}, \quad \forall\sigma \in R(D),\ \tau \in C(D).$$

特别, $\gamma_{\tau\sigma} = \gamma_1\text{sg}\tau$. 故如果能证明: 对于不具有形状 $\tau\sigma$ $(\tau \in C(D), \sigma \in R(D))$ 的元素 $\rho \in S_n$, 恒有 $\gamma_\rho = 0$. 则我们就有 $a = \gamma_1F_D$. 现设 $\rho \neq \tau\sigma, \forall\tau \in C(D), \sigma \in R(D)$. 则 $\rho^{-1} \neq \sigma\tau, \forall\sigma \in R(D), \tau \in C(D)$. 于是 $\rho^{-1}D \neq \sigma\tau D$. 由引理 (3.3.1) 推出: 存在对换 $\pi \in R(D)$ 使得 $\pi \in C(\rho^{-1}D) = \rho^{-1}C(D)\rho$. 故 $\pi = \rho^{-1}\pi'\rho$, 这里 $\pi' \in C(D)$ 是对换. 因此 $\rho = \pi'\rho\pi$ 与 $\gamma_{\pi'\rho\pi} = \gamma_\rho = -\gamma_{\pi'\rho\pi}$. 这推出 $\gamma_\rho = 0$. □

现令 $x \in F[S_n]$. 考虑元素 $F_DxF_D = A_DS_DxA_DS_D$. 由 (3) 式知:

$$\tau F_DxF_D\sigma = (\text{sg}\tau)F_DxF_D, \quad \forall\sigma \in R(D), \tau \in C(D).$$

故由引理 (3.3.2) 得: 存在 $\gamma \in F$ 使得 $F_D x F_D = \gamma F_D$. 特别, 存在 $\gamma \in F$ 使得 $F_D^2 = \gamma F_D$. 现在要证: $\gamma \neq 0$. 考虑映射 $F[S_n] \to F[S_n]$ 使得 $x \longmapsto F_D x$. 如 $\gamma = 0$, 则 $F_D^2 = 0$, 故映射 $x \longmapsto F_D x$ 是幂零的, 其迹为零. 另一方面, 如 $\rho \in S_n$, 观察映射 $x \longmapsto \rho x$ 关于某基的矩阵. 我们看到: 该映射的迹当 $\rho \neq 1$ 时等于零, 而当 $\rho = 1$ 时等于 $n!$. 因为由定义知 F_D 的表达式 (2) 中 1 的系数等于 1, 所以映射 $x \longmapsto F_D x$ 的迹等于 $n! \neq 0$ (因为我们假定 char. $F \nmid n!$). 由这个矛盾推出 $\gamma \neq 0$.

现置 $e_D = \gamma^{-1} F_D$. 则 $e_D^2 = e_D \neq 0$ 与 $e_D F[S_n] e_D = F e_D$. 又, 如果 $\alpha, \beta \in \Lambda_n, \alpha \neq \beta$, 令 D_α (或 E_β) 是型 α (或型 β) 的 Young 表, 则由 (4) 式知 $e_{D_\alpha} F[S_n] e_{E_\beta} = 0$.

回忆如 e, f 是 F 代数 A 的幂等元, 则存在 $\mathrm{Hom}_A(Ae, Af)$ 与 eAf 之间的加法群同构及存在 $\mathrm{End}_A Ae$ 与 eAe 之间的 F 代数反同构. 据定理 (3.2.3) 知: S_n 在 $F[S_n]e_{D_\alpha}$ 上的表示是绝对不可约的. 如 $\alpha \neq \beta$, 则表示 $F[S_n]e_{D_\alpha}$ 与 $F[S_n]e_{E_\beta}$ 不等价. 因为 S_n 的共轭类个数等于 $\rho(n)$, 故我们用此法得到了 S_n 的不可约表示等价类的一个代表系. 该结果可以群代数的语言叙述如下:

(3.3.3) 定理 *如 char. $F = 0$ 或 char. $F = \rho > n$, 则*

$$F[S_n] \cong M_{n_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{n_{p(n)}}(F). \qquad \square$$

上述的证明方法是构造性的. 从理论上来讲, 该方法可用来把 $F[S_n]$ 分解为其单分支的直和. 不可约表示的次数 n_i 可通过下一章将要介绍的特征标的计算来得到. 此处我们暂不考虑这些问题. 显然, 由定理 (3.3.3) 可推出以下结论.

(3.3.4) 推论 *域 $\mathbb{Q}$ 与满足条件 $\rho > n$ 的域 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/(p)$ 都是 S_n 的分裂域.*

习 题

1. 设 G 是满足下列条件的群:

(a) 存在 $H, K \leqslant G$ 使得 $H \bigcap K = \{1\}$.

(b) 存在从 G 到乘法群 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ 内的同态 f 使得 $\forall x \notin HK$, 存在某 $u \in H \bigcap xKx^{-1}$ 使得 $f(u) \neq 1$.

证明: 如 $e = \sum\limits_{\substack{p \in H \\ q \in K}} f(q) pq \in \mathbb{Q}[G]$, 则 $\mathbb{Q}[G]e$ 是 $\mathbb{Q}[G]$ 的极小左理想.

提示 仿照引理 (3.3.2) 与定理 (3.3.3) 的证明.

2. 试给出 S_4 的不可约表示等价类的一个代表系.

第四章　特征标理论

设 (ρ, V) 是群 G 的 n 次表示. $\forall g \in G, \rho(g)$ 可由一个 n 阶矩阵来刻画, 即可由 n^2 个矩阵系数来刻画. 由于我们只关心表示 ρ 的等价类, n^2 个矩阵系数所含的信息对于表示 ρ 来讲是过多了. 于是我们考虑: 能否只保留一些最本质的信息, 而弃其余于不顾, 从而使问题尽可能简化? 特征标理论正是在这样的考虑下产生的.

§4.1　特征标的基本概念

设 $(\rho, V) \in R_F(G)^+$, 在 G 上定义 F 值函数:

$$\chi_\rho : g \longmapsto \mathrm{tr}.\rho(g),$$

这里 $\mathrm{tr}.\rho(g)$ 是 V 上线性变换 $\rho(g)$ 的迹. 称 χ_ρ 为 G 的表示 ρ 的**特征标**. 如 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$, 则称 χ_ρ 为**不可约特征标**. 如 $F = \mathbb{C}$, 则称 χ_ρ 为**复特征标**. ρ 的次数 $\deg \rho$ 也称为特征标 χ_ρ 的**次数**, 记作 $\deg \chi_\rho$. 次数为 1 的特征标称为**线性特征标**.

(4.1.1) 特征标有如下简单性质:

性质 1 如 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) 是 G 的两个等价表示, 则 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

这因为: 存在从 V_1 到 V_2 的线性同构 η 使

$$\rho_2(g) = \eta \rho_1(g) \eta^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

于是 $\mathrm{tr}.\ \rho_1(g) = \mathrm{tr}.\rho_2(g)$, $\forall g \in G$.

由此, 我们可以 $\mathrm{Irr}_F G$ 记 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 中元素的特征标集合, 而以 $\mathrm{ch}_F^+(G)$ 或 $\mathrm{ch}^+(G)$ 记 $R_F(G)^+$ 中元素的特征标集合. 称 $\mathrm{ch}_F^+(G)$ 的元素为 G **的** F **特征标**.

如函数 f 在 G 的共轭类上取常值, 则称 f 为 G **上类函数**.

性质 2 χ_ρ 是 G 上类函数.

这因为: $\forall g, h \in G$,

$$\mathrm{tr}.\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}.\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1} = \mathrm{tr}.\rho(g).$$

故 $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

性质 3 当 $\mathrm{char}.F = 0$ 时, $\deg \rho = \chi_\rho(1)$.

这因为: $\rho(1) = 1_V$. 故 $\chi_\rho(1) = \mathrm{tr}.\rho(1) = \dim_F V$.

性质 4 设 U 是 V 的 $\rho(G)$ 不变子空间. 设 $\rho' = \rho_U$ 与 $\rho'' = \rho_{V/U}$ 分别是 ρ 的子表示与商表示. 我们有特征标公式:

$$\chi_\rho(g) = \chi_{\rho'}(g) + \chi_{\rho''}(g), \quad \forall g \in G.$$

特别, 当 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ 时, 关系式 $\chi_\rho(g) = \chi_{\rho_1}(g) + \chi_{\rho_2}(g)$, $\forall g \in G$, 成立.

这因为: 存在 V 的基 $B = (u_1, \cdots, u_n)$ 使 $B_1 = (u_1, \cdots, u_r)$ 是 U 的基, 而 $B_2 = (u_{r+1} + U, \cdots, u_n + U)$ 是 V/U 的基. 于是矩阵 $\rho_B(g)$ 有形状

$$\begin{pmatrix} \rho'_{B_1}(g) & * \\ 0 & \rho''_{B_2}(g) \end{pmatrix}.$$

性质 5 如果 ρ_1 与 ρ_2 是 G 的表示, 则

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g), \quad \forall g \in G.$$

这因为: 由线性代数理论知: 如 $a_i \in \mathrm{End}V_i$, $i = 1, 2$, 则 $\mathrm{tr}.(a_1 \otimes a_2) = \mathrm{tr}.a_1 \cdot \mathrm{tr}.a_2$ (见 §1.9 的 (1) 式).

性质 6 如果 m 是群 G 的指数 (即 G 的元素阶数的最小公倍数), 则 G 的任何复表示 ρ 的特征标 χ 的值是 $\deg \rho$ 个 m 次单位根的和.

这因为: 如果 $g \in G$, 则 $g^m = 1$. 于是线性变换 $\rho(g)$ 的最小多项式 $g(\lambda)$ 是 $\lambda^m - 1$ 的因子. 由于 $\lambda^m - 1$ 在复数域里没有重根, 这推出 $g(\lambda)$ 无重根, 其根均为 m 次单位根. 据推论 (2.1.12), 适当选取表示空间的基可使 $\rho(g)$ 的矩阵成对角矩阵 $\mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 这里 ω_i 是 m 次单位根, $n = \deg \rho$. 于是 $\chi(g) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

由上式可推出: $|\chi(g)| \leqslant \chi(1)$. 等号成立当且仅当 $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n$, 特别, $\chi(g) = \chi(1)$ 当且仅当 $\rho(g) = \rho(1)$.

性质 7 设 $(\rho, V) \in R_{\mathbb{C}}(G)^+$, 则

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}, \quad \forall g \in G,$$

这里 $\overline{x}$ 是 $x \in \mathbb{C}$ 的复共轭. 特别, 如 (ρ^*, V^*) 是 (ρ, V) 的反轭表示, 则 $\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

这因为: 选取 V 的基 B 使 $\rho_B(g) = \mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 这里 ω_i 为单位根. 则

$$\rho_B(g^{-1}) = \mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_n)^{-1} = \mathrm{diag}\{\omega_1^{-1}, \cdots, \omega_n^{-1}\} = \mathrm{diag}(\overline{\omega}_1, \cdots, \overline{\omega}_n).$$

故 $\chi_\rho(g^{-1}) = \sum \overline{\omega}_i = \overline{\sum \omega_i} = \overline{\chi_\rho(g)}$. 令 B^* 为 V^* 的关于 B 的对偶基, 则由 §2.2 的 (7) 式知

$$\rho^*_{B^*}(g) = (\rho_B(g)^T)^{-1} = \rho_B(g^{-1})^T.$$

因此 $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

(4.1.2) 例

(a) 设 (ρ, V) 是 G 的单位表示, 则 $\dim_F V = 1$, $\rho(g) = 1_V$, $\forall g \in G$. 此时, 称 χ_ρ 为**单位特征标**. 我们有 $\chi_\rho(g) = 1, \forall g \in G$.

(b) 设 ρ_{reg} 是 G 的正则表示, 我们要计算 ρ_{reg} 的特征标 χ_{reg}. 群代数 $F[G]$ 有 F 基 $G = \{g_1 = \mathbf{1}, g_2, \cdots, g_n\}$. 易见

$$\chi_{\mathrm{reg}}(\mathbf{1}) = \dim_F F[G] = n.$$

另一方面, 当 $i > 1$ 时,

$$g_i g_j \neq g_j, \quad \forall j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

这说明 $\rho_{\mathrm{reg}}(g_i)$ 关于基 G 的矩阵的对角元全等于零. 于是

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{如} g = \mathbf{1}, \\ 0, & \text{如} g \neq \mathbf{1}. \end{cases}$$

(4.1.3) 特征标表 设 $\mathscr{C}_1 = \{\mathbf{1}\}, \mathscr{C}_2, \cdots, \mathscr{C}_s$ 是 G 的共轭类, $\mathrm{Irr}_F G = \{\chi_1, \cdots, \chi_t\}$, 这里 χ_1 是 G 的单位特征标. 令 g_i 为 $\mathscr{C}_i$ 中代表元, $i = 1, 2, \cdots, s$. 我们称以下表格为 G 的 F **特征标表**:

	$\mathscr{C}_1$ ······ $\mathscr{C}_j$ ········· $\mathscr{C}_s$
χ_1	⋮
⋮	⋮
χ_i	------- $\chi_i(g_j)$ -------
⋮	⋮
χ_t	⋮

一般来讲, G 的特征标表与域 F 的选取有关, 在域 F 取定的情形下, 上表可简称为 G 的特征标表, 由 (4.1.1) 知: 当域 F 取定时, 群 G 的任何特征标都可从其特征标表通过计算而得. 以后我们要证明从群 G 的特征标表可获得关于群 G 的结构及其表示的大量信息, 故计算特征标表是研究群 G 的基本问题之一.

同构的群有相同的特征标表, 但其逆不一定成立. 如果群 G 和 G' 有相同的特征标表, 则不总有关系 $G \cong G'$(见习题 6), 但由群 G 和 G' 在域 $\mathbb{C}$ 上表示的完全可约性可推出: $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}[G']$. 由 H.Nagao 和 T.Oyama 的文章知: 如果 G 和 G' 有相同的特征标表, 且 G 是对称群 S_n 或交代群 A_n, 则 $G \cong G'$. 由单群的分类定理可证明: 如果 G 和 G' 有相同特征标表, 且 G 是单群, 则也有 $G \cong G'$.

(4.1.4) 例 设 $G = D_n = \langle r, s | r^n = s^2 = (sr)^2 = 1\rangle$. 这是阶数等于 $2n$ 的二面体群. 沿用 (3.1.9)(b) 的记号, 我们有 G 的如下特征标表, 这里 G 的共轭类以其所含的一个元素作为代表.

(i) $n = 2\nu + 1, \nu \geqslant 1$.

	1	s	$r^k, 1 \leqslant k \leqslant \nu$
χ_{ρ_1}	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	-1	1
$\chi_{\sigma_l}, 1 \leqslant l \leqslant \nu$	2	0	$2\cos 2kl\pi/n$

(ii) $n = 2\nu,\ \nu \geqslant 2$.

	1	s	rs	$r^k, 1 \leqslant k \leqslant \nu - 1$
χ_{ρ_1}	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	-1	-1	1
χ_{ρ_3}	1	1	-1	$(-1)^k$
χ_{ρ_4}	1	-1	1	$(-1)^k$
$\chi_{\sigma_l}, 1 \leqslant l \leqslant \nu - 2$	2	0	0	$2\cos 2kl\pi/n$

习 题

1. 证明: 映射 $a \longmapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与映射 $a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 确定了二面体群 $D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$ 的两个复表示, 这里 $i = \sqrt{-1}$. 判定这两个表示是否等价.

2. 设 F 是任意域, $(\rho, V) \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$. 验证:

$$\sum_{g \in G} \rho(g) = \begin{cases} 0, & \text{如}\rho \neq 1_G, \\ |G| 1_V, & \text{如}\rho = 1_G. \end{cases}$$

3. 证明: G 是阿贝尔群当且仅当 G 的所有不可约复特征标是线性的. 进而证明: 设 G' 是 G 的导群, 则 G 的相异线性特征标的个数等于 $[G : G']$.

4. 设 G 是阿贝尔群. 记 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G = \widehat{G}$.

(a) 证明 $\widehat{G}$ 关于如下定义的合成构成阿贝尔群: $\forall \chi, \psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$, 定义 $\chi\psi : G \to \mathbb{C}$ 为

$$(\chi\psi)(g) := \chi(g)\psi(g), \quad \forall g \in G.$$

(b) 如 $H \leqslant G$, 令 $H^{\perp} = \{\lambda \in \widehat{G} | H \subseteq \mathrm{Ker}\lambda\}$. 证明 $H \longmapsto H^{\perp}$ 是从 G 的子群集合到 $\widehat{G}$ 的子群集合上的双射.

(c) 证明: $G \cong \widehat{G}$.

5. 设 H 是阿贝尔群 G 的子群. 证明限制映射 $\psi \overset{\theta}{\longmapsto} \psi_H$ 是从 $\widehat{G}$ 到 $\widehat{H}$ 上的群满同态. 找出 θ 的核, 并证明 H 的任何特征标都可扩充为 G 的特征标. 这后一结论对于一般群 G 是否也成立?

6. 找出群 S_3, D_4 与 Q_2 的特征标表. 注意 D_4 与 Q_2 有相同的特征标表, 但它们作为群并不同构. 证明群代数 $\mathbb{C}[D_4]$ 与 $\mathbb{C}[Q_2]$ 同构.

7. 令 $\chi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$. 定义 $\det\chi : G \to \mathbb{C}$ 如下: 设 $\rho \in R_{\mathbb{C}}(G)^{+}$ 的特征标等于 χ. 置 $(\det\chi)(g) = \det\rho(g)$. 验证: $\det\chi$ 是 G 的线性特征标, 它由 χ 所唯一确定. 如 $\varphi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$, 则等式 $\det(\chi + \varphi) = (\det\chi)(\det\varphi)$ 与 $\det(\chi\varphi) = (\det\chi)^{\varphi(1)}(\det\varphi)^{\chi(1)}$ 成立.

8. (a) 令 G 为 8 阶非阿贝尔群. 证明 G 有唯一的非线性不可约特征标 χ. 证明 $\chi(1) = 2, \chi(z) = -2$ 与 $\chi(x) = 0$, 这里 $z \in G' - \{1\}, x \in G - G'$.

(b) 如果 $G \cong D_4$, 则 $\det\chi \neq 1_G$.

(c) 如果 $G \cong Q_2$, 则 $\det\chi = 1_G$.

提示　证明 $\mathrm{Ker}(\det\chi)$ 含所有 4 阶元素. 然后利用关于特征标的一些基本性质.

注　D_4 与 Q_2 有相同的特征标表, 但却有不同的映射 det: $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G \to \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$.

9. 设 ρ 是 G 在 F 上的正则表示, $m = |G|$. 设 $F(x_{g_1}, \cdots, x_{g_m})$ 是 m 个相异不定元 $x_{g_1}, \cdots, x_{g_m}$ 在 F 上生成的分式域. 行列式 $\det \sum_{g \in G} x_g \rho(g)$ 称为 G 在 F 上的群行列式(研究该行列式曾是 Frobenius 引进特征标概念的主要动机). 证明: 如果 $F = \mathbb{C}, G$ 是阿贝尔群, 则

$$\det\left(\sum_{g \in G} x_g \rho(g)\right) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left(\sum_{g \in G} x_g \chi(g)\right).$$

注　该结果由 R.Dedekind 获得.

10. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$ 与 $g, h \in G$. 试证: $\chi(g)\chi(h) = \dfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{z \in G} \chi(gh^z)$.

提示　令 ρ 为 χ 所对应的表示. 令 $K_i, K_j \in \mathbb{C}[G]$ 分别为含 g, h 的共轭类的类和, 则可利用如下事实:

$$\rho(K_i)\rho(K_j) = \rho(K_i K_j).$$

§4.2 特征标的正交关系

本节旨在导出群的不可约复特征标之间的基本正交关系. 为此, 先考虑较一般的情形: 取 F 为满足 char. $F \nmid |G|$ 的代数闭域.

由定理 (3.1.5) 知:

$$F[G] = M_{n_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(F),$$

每个单分支 $M_{n_i}(F)$ 唯一地决定了 G 的不可约表示 ρ_i, 且 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G = \{\rho_i | 1 \leqslant i \leqslant s\}$. 令 χ_i 为 ρ_i 的特征标.

另一方面, 恒等元 $1 \in F[G]$ 有分解式: $1 = \sum_{i=1}^{s} e_i$, 这里 $e_i \in M_{n_i}(F)$ 满足

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant s,$$

称 e_i 为 $F[G]$ 中对应于 χ_i 的**本原幂等元**. e_i 是单代数 $M_{n_i}(F)$ 中的恒等元.

导出特征标正交关系的关键是用特征标明显地计算出 $e_i = \sum_{g \in G} a_g g$ 的系数 $a_g \in F$.

我们有 $\mathrm{Irr}_F G = \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s\}$. 熟知数 s 恰等于 G 的共轭类个数. 记 χ_{reg} 为 G 的正则特征标. 则由定理 (3.1.5) 与 (3.1.6) 知:

$$\chi_{\mathrm{reg}} = \sum_{i=1}^{s} \chi_i(1)\chi_i. \tag{1}$$

注意 G 的任何 F 特征标 χ 都可唯一地 F 线性地扩充为 $F[G]$ 上的函数. 后者称为群代数 $F[G]$ 的**特征标**, 仍记为 χ.

(4.2.1) 定理 $e_i = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1)\chi_i(g^{-1})g$.

证 写 $e_i = \sum_{g \in G} a_g g$. 由 (4.1.2)(b) 知 $\chi_{\mathrm{reg}}(e_i g^{-1}) = a_g |G|$. 再由 (1) 式得

$$a_g |G| = \sum_j \chi_j(1)\chi_j(e_i g^{-1}). \tag{2}$$

把 G 的表示 ρ_i 扩充为 $F[G]$ 的表示并仍记作 ρ_i, 则由等式

$$\rho_j(e_i g^{-1}) = \rho_j(e_i)\rho_j(g^{-1}) = \begin{cases} 0, & \text{如} i \neq j, \\ \rho_i(g^{-1}), & \text{如} i = j, \end{cases}$$

我们有

$$\chi_j(e_i g^{-1}) = \chi_i(g^{-1})\delta_{ij}. \tag{3}$$

以 (3) 式代入 (2) 式得 $a_g |G| = \chi_i(1)\chi_i(g^{-1})$. □

(4.2.2) 定理 (广义正交关系)

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\chi_j(g^{-1})=\delta_{ij}\frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)},\quad \forall g\in G.$$

证 把定理 (4.2.1) 的表达式代入等式 $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$, 并比较 $h\in G$ 的系数得

$$\frac{\chi_i(1)\chi_j(1)}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi_i((hg^{-1})^{-1})\chi_j(g^{-1})=\frac{\delta_{ij}}{|G|}\chi_i(1)\chi_i(h^{-1}).$$

把上式中的 h 换成 h^{-1} 即得所要求的结果. □

在定理 (4.2.2) 中取 $h=1$ 即得

(4.2.3) 推论 (第一正交关系)

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1})=\delta_{ij}. \tag{4}$$

现设 $F=\mathbb{C}$, 则公式 (4) 变为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}=\delta_{ij}. \tag{5}$$

让我们考虑 G 上复值函数所组成的复向量空间 $\mathbb{C}^G$, 这里 $\mathbb{C}^G$ 上的加法与纯量乘法定义如下: $\forall\varphi,\psi\in\mathbb{C}^G, a\in\mathbb{C}$ 与 $g\in G$,

$$(\varphi+\psi)(g):=\varphi(g)+\psi(g),$$
$$(a\varphi)(g):=a\varphi(g).$$

定义 $\mathbb{C}^G$ 上 Hermitian 型为

$$(\varphi,\psi):=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}. \tag{6}$$

则
$$(\varphi,\varphi)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\varphi(g)|^2\geqslant 0.$$

等号成立当且仅当 $\varphi=0$. 故 (φ,ψ) 是正定 Hermitian 型. 等式 (5) 相当于

$$(\chi_i,\chi_j)=\delta_{ij}. \tag{7}$$

这说明 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 是 $\mathbb{C}^G$ 中标准的正交向量集合, 即它们关于 Hermitian 型 (—,—) 两两正交且长度都等于 1. 由此可见, $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 是 $\mathbb{C}$ 上线性无关集合. 我们已注意

到特征标是类函数 (见 (4.1.1) 的性质 2). 但 G 上复值类函数全体 $\mathrm{cf}_{\mathbb{C}}(G)$ (或简记为 $\mathrm{cf}(G)$) 在 $\mathbb{C}^G$ 中形成其维数等于 G 的共轭类个数的子空间. 由定理 (3.1.8) 得知 G 的共轭类个数等于 $|\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G|$. 因此 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 为 $\mathrm{cf}(G)$ 的 $\mathbb{C}$ 基, 且 Hermitian 型 $(-,-)$ 限制在 $\mathrm{cf}(G)$ 上非退化.

设 $\rho_i \in \overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G$ 有特征标 $\chi_i, i = 1, 2, \cdots, s$. 由复表示的完全可约性与特征标的正交性知: 两个复表示等价当且仅当 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant s, \rho_i$ 在这两个表示中出现的重数相等.

设 $\rho \in R_{\mathbb{C}}(G)^+$ 有特征标 χ. 记 m_i 为 ρ_i 在 ρ 中出现的重数. 则由 (4.1.1) 的性质 1,4 知

$$\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_s\chi_s. \tag{8}$$

今由公式 (7) 知

$$m_i = (\chi_i, \chi). \tag{9}$$

于是数 m_i 由 χ 唯一确定. 因此两个复表示等价当且仅当它们有相同的特征标. 又由公式 (8) 得

$$(\chi, \chi) = \sum_i m_i^2.$$

$(\chi, \chi) = 1$ 当且仅当 $m_1, \cdots, m_s$ 之中恰有一个数为 1, 其余数均为零. 这相当于说 $(\chi, \chi) = 1$ 当且仅当特征标 χ 不可约.

(4.2.4) 例 设 $G = G_1 \times G_2$ 与 $\rho_i \in R_F(G_i)^+, i = 1, 2$. 在 (2.3.5) 中, 我们构造了 G 的表示 $\rho = \rho_1 \# \rho_2$. 由 §2.3 的 (5) 式与 (4.1.1) 的性质 5 可推出: $\forall g_i \in G_i, i = 1, 2$,

$$\chi_{\rho_1\#\rho_2}(g_1, g_2) = \chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_2}(g_2).$$

现设 $\rho_i, \rho_i' \in \overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G_i, i = 1, 2$. 则

$$\begin{aligned}
(\chi_{\rho_1\#\rho_2}, \chi_{\rho_1'\#\rho_2'}) &= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1,g_2)} \chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_2}(g_2)\overline{\chi_{\rho_1'}(g_1)\chi_{\rho_2'}(g_2)} \\
&= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{(g_1,g_2)} \chi_{\rho_1}(g_1)\overline{\chi_{\rho_1'}(g_1)}\chi_{\rho_2}(g_2)\overline{\chi_{\rho_2'}(g_2)} \\
&= \left(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1} \chi_{\rho_1}(g_1)\overline{\chi_{\rho_1'}(g_1)}\right)\left(\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2} \chi_{\rho_2}(g_2)\overline{\chi_{\rho_2'}(g_2)}\right) \\
&= (\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_1'})(\chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_2'}) \\
&= \begin{cases} 1, \text{如 } \rho_1 \sim \rho_1' \text{ 与 } \rho_2 \sim \rho_2', \\ 0, \text{如 } \rho_1 \nsim \rho_1' \text{ 或 } \rho_2 \nsim \rho_2'. \end{cases}
\end{aligned}$$

这说明: $\rho_1\#\rho_2$ 是 G 的不可约表示, 且 $\rho_1\#\rho_2\sim\rho_1'\#\rho_2'$ 当且仅当 $\rho_1\sim\rho_1'$ 与 $\rho_2\sim\rho_2'$. 现设 $\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G_i=\{\rho_1^{(i)},\cdots,\rho_{m_i}^{(i)}\}, i=1,2$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{j,k}(\deg\ (\rho_j^{(1)}\#\rho_k^{(2)}))^2\\&=\sum_{j,k}(\deg\ \rho_j^{(1)})^2(\deg\ \rho_k^{(2)})^2\quad(\text{由 §2.3 的 (6) 式})\\&=\sum_{j}(\deg\ \rho_j^{(1)})^2\sum_{k}(\deg\ \rho_k^{(2)})^2\\&=|G_1||G_2|\quad(\text{由定理 (3.1.8)(b)})\\&=|G|.\end{aligned}$$

根据定理 (3.1.8)(b), 这推出

$$\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G=\{\rho_1\#\rho_2|\rho_i\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G,i=1,2\}.$$

由此很容易推出更一般的结论: 设 $G=G_1\times\cdots\times G_r$, 则

$$\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G=\{\rho_1\#\rho_2\#\cdots\#\rho_r|\rho_i\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G_i,1\leqslant i\leqslant r\}.$$

于是关于 G 的表示的研究可归结为关于其因子群的表示的研究.

接着要证关于特征标的“第二正交关系”, 它将由第一正交关系导出. 虽然它在实质上并未为群的特征标值提供任何新的信息, 但对于特征标值的计算与应用都非常有用.

设 $\mathscr{C}_1=\{1\},\mathscr{C}_2,\cdots,\mathscr{C}_s$ 是 G 的共轭类, $h_k=|\mathscr{C}_k|$. 写 $\chi_{ik}=\chi_i(g)$, 这里 $g\in\mathscr{C}_k$.

(4.2.5) 定理 (第二正交关系)

$$\sum_{i=1}^{s}\chi_{ij}\overline{\chi}_{ik}=\frac{|G|}{h_k}\delta_{jk}.\tag{10}$$

证 由第一正交关系 (4) 式知

$$|G|\delta_{ij}=\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{g\in\mathscr{C}_k}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}=\sum_{k=1}^{s}\chi_{ik}h_k\overline{\chi_{jk}}.$$

由此得

$$\sum_{k=1}^{s}\chi_{ik}h_k\overline{\chi_{jk}}=|G|\delta_{ij}.\tag{11}$$

令 $\mathbf{X}=(\chi_{ij})\in M_s(\mathbb{C})$ 与 $\mathbf{H}=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_s)$. 则 (11) 式相当于矩阵关系式

$$\mathbf{XH}\overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}=|G|\mathbf{I},$$

这里 I 是恒等矩阵. 根据方阵的右逆矩阵必为左逆矩阵的性质, 我们有

$$\overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = |G|\mathbf{H}^{-1}.$$

这等价于 $\sum_{i=1}^{s} \chi_{ij}\overline{\chi_{ik}} = \frac{|G|}{h_k}\delta_{jk}$. □

注 特征标的第一、二正交关系也称为**特征标的行、列正交关系**, 其理由可从特征标表的定义得知.

特征标之间的上述正交关系是计算特征标表的强有力工具.

(4.2.6) 设 $G = S_4$ 是集合 $\{1,2,3,4\}$ 上的对称群. 选取 S_4 的共轭类代表系: $\mathbf{1}, (12), (123), (1234), (12)(34)$, 这里 $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 表示置换

$$i_j \longmapsto \begin{cases} i_{j+1}, \text{如 } 1 \leqslant j < r, \\ i_1, \quad \text{如 } j = r. \end{cases}$$

依次记对应的共轭类为: $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4, \mathscr{C}_5$. 令 $h_i = |\mathscr{C}_i|$, 则 $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 6, 8, 6, 3)$, S_4 含指标为 2 的正规子群 A_4, 这里 A_4 由 S_4 中所有偶置换组成, 习惯上称 A_4 为 **4 次交代群**. S_4 也含指标为 6 的正规子群 $V = \{\mathbf{1}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, 通常称 V 为 **Klein 四元群** (见§ 2.3 的习题). 今元素 4 在 S_4 中的稳定子 $\{\pi \in S_4 | \pi(4) = 4\}$ 同构于 3 次对称群 S_3, 且 S_4 同构于 V 与 S_3 的半直积: $S_4 \cong V \rtimes S_3$. 于是存在从 S_4 到 $S_3 \cong S_4/V$ 的典范同态 η. 如 ρ 是 S_3 的表示, 则 ρ 可提升为 S_4 的表示 $\rho\eta$. 表示 $\rho\eta$ 的特征标是 $\chi_\rho\eta$.

今存在从 S_3 到 $D_3 = \langle r, s | r^3 = s^2 = (rs)^2 = 1\rangle$ 的群同构: $(12) \mapsto s$, $(123) \mapsto r$. 于是 S_3 的特征标表可从 D_3 的特征标表得到 (见 (4.1.4)).

	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
χ_3	2	0	−1

通过 η 的提升而得到的 S_4 的对应特征标仍记为 χ_1, χ_2, χ_3. 由于 $(12)(13)(24) = (1324)$, 我们得到 S_4 的特征标表中关于这三个特征标的部分如下:

	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	−1	1	−1	1
χ_3	2	0	−1	0	2

记 $n_i = \deg \chi_i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, 则 $\sum n_i^2 = 24$. 于是 $n_4^2 + n_5^2 = 18$. 这推出 $n_4 = n_5 = 3$. 即其余两个不可约特征标的次数均为 3. 所求特征标表的最末两

行形如 $(3,\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 与 $(3,\alpha',\beta',\gamma',\delta')$. 在 (10) 式中, 令 $j=1$ 与 $k=2,3,4,5$ 得: $\alpha+\alpha'=0$, $\beta+\beta'=0$, $\gamma+\gamma'=0$ 与 $\delta+\delta'=-2$. 所以这最末一行为 $(3,-\alpha,-\beta,-\gamma,-2-\delta)$. 其次在 (4) 式中以 $i=4$ 与 $j=1,2,3$ 代入得方程组

$$\begin{cases} 3+6\alpha+8\beta+6\gamma+3\delta=0, \\ 3-6\alpha+8\beta-6\gamma+3\delta=0, \\ 6 \qquad -8\beta \qquad +6\delta=0. \end{cases}$$

解之得: $\beta=0$, $\delta=-1$, $\gamma=-\alpha$. 再在 (10) 式中以 $j=2,k=4$ 代入得 $\alpha\overline{\gamma}=-1$. 另一方面, $\alpha=\chi_4((12))$ 是 1 的平方根之和, 它必为实数. 因此 $\alpha\overline{\gamma}=\alpha(-\overline{\alpha})=-\alpha^2=-1$, 即 $\alpha^2=1$. 所以 $\alpha=\pm1$, $\gamma=\mp1$. 于是所要求的特征标表的最末两行要么是 $(3,1,0,-1,-1)$ 与 $(3,-1,0,1,-1)$, 要么是 $(3,-1,0,1,-1)$ 与 $(3,1,0,-1,-1)$. 如不考虑行的次序, 则这两种情形确定了同一个特征标表.

注 上面例子告诉我们如何利用特征标之间的正交关系及其它一些已知信息去计算特征标表. 以后我们还要导出关于计算特征标表的更多有用信息. 计算一般对称群 S_n 的特征标表的工作始于 Frobenius (1900 年左右). 他给出了计算这些特征标值的公式. 关于这方面的文献请参阅 Weyl 的 "*The classical groups*" p.213.

习 题

1. 设 $F\subseteq\mathbb{C}$, ρ 是 G 的以 χ 为特征标的 F 表示. 证明单位表示 $\mathbf{1}_G$ 出现在 ρ 中的重数等于 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$.

2. 设 $F\subseteq\mathbb{C},(\rho,V)$ 与 (τ,W) 是 G 的两个不可约 F 表示. 令 $\varphi:V\to W$ 为 F 线性映射. 置 $\overline{\varphi}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\tau(g^{-1})\varphi\rho(g)$. 则 $\overline{\varphi}$ 也是从 V 到 W 内的 F 线性映射.

(a) 如 $\rho\nsim\tau$, 则 $\overline{\varphi}=0$.

(b) 如 $V=W$ 与 $\rho=\tau$, 则 $\overline{\varphi}=\frac{\mathrm{tr}.\varphi}{\dim_F V}\mathbf{1}_V$.

(c) 设 B,C 分别是 V,W 的 F 基. $\forall g\in G$, 令 $\rho_B(g)=(a_{ij}(g))$ 与 $\tau_C(g)=(b_{kl}(g))$. 则在情形 (a) 时有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}b_{kl}(g^{-1})a_{ji}(g)=0 \quad \forall i,j,k,l.$$

在情形 (b) 时有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}b_{kl}(g^{-1})a_{ji}(g)=\frac{1}{\dim_F V}\delta_{ki}\delta_{lj}.$$

(d) 设 χ,ζ 分别是 ρ,τ 的特征标, 请利用 (c) 的结果来证明:

$$(\chi,\zeta)=\begin{cases}1, & 如\rho\sim\tau, \\ 0, & 如\rho\nsim\tau.\end{cases}$$

3. 设 M 与 N 是分别以 μ 与 ν 为特征标的不可约 $\mathbb{C}[G]$ 模. 令 M^* 为 M 的反轭模. 记

$$\mathrm{Inv}_G(M^* \otimes_{\mathbb{C}} N) := \{m \in M^* \otimes_{\mathbb{C}} N | gm = m, \forall g \in G\}.$$

证明: $\mathrm{tr.}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g, M^* \otimes_{\mathbb{C}} N\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mu^*(g)\nu(g) = (\nu,\mu) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Inv}_G(M^* \otimes_{\mathbb{C}} N))$.

并利用该结果与 Schur 引理证明:

$$(\nu,\mu) = \begin{cases} 1, & 如\mu = \nu, \\ 0, & 如\mu \neq \nu. \end{cases}$$

注 习题 2,3 分别提供了导出特征标之间的正交关系的不同途径.

4. 试用特征标的正交关系证明以下结果:

(a) G 的每个不可约复表示 ρ 出现在 G 的正则表示中的重数等于 $\deg\rho$.

(b) 设 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G = \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$, 则 $|G| = \sum_{i=1}^{s}(\deg \chi_i)^2$.

(c) 如 $1 \neq g \in G$, 则 $\sum_{i=1}^{s}(\deg \chi_i)\chi_i(g) = 0$.

5. 回忆 §1.1, 习题 7 里关于 Clifford 群 $\mathbb{CL}(n)$ 的定义. 证明:

(a) $\mathbb{CL}(n)$ 有 2^n 个两两不等价的一维表示 (ρ_i, V_i), 它们都满足: $\rho_i(-1) = 1_{V_i}$.

(b) $\mathbb{CL}(n)$ 的次数大于 1 的不可约表示 (ρ, V) 都满足: $\rho(-1) = -1_V$.

(c) 当 $n > 1$ 是偶数时, $\mathbb{CL}(n)$ 恰有一个次数大于 1 的不可约实表示, 其次数等于 $2^{n/2}$, 其特征标 χ 满足: $\chi(\pm\gamma_A) = \pm\delta_{A\varnothing}2^{n/2}, \forall A \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, 这里当 $A = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$, 时, 记 $\gamma_A = \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_r}$.

(d) 当 $n > 1$ 是奇数时, $\mathbb{CL}(n)$ 恰有二个次数大于 1 的不可约复表示 $(\rho_\pm, V)$, 满足: $\deg \rho_+ = \deg \rho_- = 2^{(n-1)/2}$ 和 $\overline{\rho}_+ = \rho_-$, 其特征标 $\chi_\pm$ 满足:

$$\chi_\pm(\gamma_A) = \begin{cases} 2^{n/2}, & 如果A = \varnothing, \\ 0, & 如果A \neq \varnothing, \{1, \cdots, n\}, \\ \pm c2^{n/2}, & 如果A = \{1, \cdots, n\}, \end{cases}$$

这里 c 等于 1 如果 $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$; c 等于纯虚数 i 如果 $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

§4.3 特征标表的应用

从群 G 的特征标表可得到关于 G 的大量群论方面的信息. 我们沿用前二节的记号.

(I) $g \in G$ 的中心化子 $C(g)$ 的基数与其所在共轭类 $\mathrm{Cl}(g)$ 的基数.

设 $\mathrm{Cl}(g) = \mathscr{C}_k$. 则 $|C(g)| = \frac{|G|}{h_k}$. 由定理 (4.2.5) 得

$$|C(g)| = \sum_{i=1}^{s} |\chi_{ik}|^2. \tag{1}$$

特别，
$$|G| = |C(1)| = \sum_{i=1}^{s} \chi_{i1}^2 = \sum_{i=1}^{s} (\deg \chi_i)^2. \tag{2}$$
由此可得 $\mathrm{Cl}(g)$ 的基数 h_k 为
$$h_k = \frac{|G|}{|C(g)|} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \chi_{i1}^2}{\sum_{i=1}^{s} |\chi_{ik}|^2} \tag{3}$$

(II) G 的正规子群.

给定 $(\rho, V) \in R_{\mathbb{C}}(G)^+$, 设 χ 是 ρ 的特征标. 定义
$$\ker \rho = \{x \in G | \rho(x) = 1_V\}.$$

(4.3.1) 引理 $\forall g \in G, g \in \ker \rho$ 当且仅当 $\chi(g) = \chi(1)$.

证 这由 (4.1.1) 的性质 6 推知. □

定义 $\ker \chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$. 由引理 (4.3.1) 知: $\ker \rho = \ker \chi$.

(4.3.2) 引理 设 $\chi = \sum_{i=1}^{s} n_i \chi_i$ 是 G 的特征标. 则
$$\ker \chi = \bigcap_{\substack{i \\ n_i > 0}} \ker \chi_i. \tag{4}$$
特别，
$$\bigcap_i \ker \chi_i = \{1\}. \tag{5}$$

证 由 (4.1.1) 的性质 6 与等式 $\chi(g) = \chi(1)$ 推知
$$\chi_i(g) = \chi_i(1), \quad \forall i, n_i > 0.$$
反之, 如 $\forall i, n_i > 0$, 等式 $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ 成立. 则显然有 $\chi(g) = \chi(1)$. 于是等式 (4) 成立. 最后把 $\chi = \chi_{\text{reg}}$ 代入等式 (4) 即得等式 (5). □

从 G 的特征标表可找出 G 的正规子群 $N_i = \ker \chi_i$, 我们断言: G 的任何正规子群都是某些 N_i 的交. 如该断言正确, 则 G 的所有正规子群都可通过 G 的特征标表来求得. 现在我们来证明这一断言. 设 $N \lhd G$, ρ 是 G/N 的正则表示及 χ 是 ρ 的特征标. 把 ρ 看作 G 的表示 (见命题 (2.3.2)). 则由引理 (4.3.2) 知
$$N = \ker \rho = \ker \chi = \bigcap_{\substack{i \\ (\chi, \chi_i) \neq 0}} N_i.$$
于是断言得证. 由于 $|N| = \sum_{\substack{k \\ \mathscr{C}_k \subseteq N}} h_k$. G 的任何正规子群的阶数都可通过公式 (3) 由特征标表求得.

从以上讨论可见: G 是单群当且仅当

$$\ker\chi_i = \{1\}, \quad \forall i > 1.$$

于是群的单性也能从特征标表获知.

熟知群 G 可解当且仅当 G 有正规子群列

$$\{1\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = G$$

使 $[M_i : M_{i-1}]$ 是素数幂, $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n$. 由于 G 的所有正规子群及其阶数都可由特征标表求得, 这种正规子群列的存在性及群 G 的可解性也都可由 G 的特征标表推知.

(III) 群 G 的特征标表与其商群的特征标表之间的关系.

设 $N \lhd G$. 由 (2.3.1) 知: G/N 的表示与 G 的含 N 于核中的表示之间存在 $1-1$ 对应. 在这种对应下, G/N 的不可约表示对应于 G 的不可约表示. 这一现象可用特征标的语言来描述.

(4.3.3) 引理 设 $N \lhd G$.

(a) 如 χ 是 G 的特征标, $N \subseteq \ker\chi$. 则 χ 在 G 关于 N 的陪集上取常值. 定义 G/N 上函数 $\widehat{\chi}$ 如下:

$$\widehat{\chi}(Ng) := \chi(g), \quad \forall g \in G,$$

则 $\widehat{\chi}$ 是 G/N 的特征标.

(b) 如 $\widehat{\chi}$ 是 G/N 的特征标, 则 G 上函数 $\chi : g \longmapsto \widehat{\chi}(Ng)$ 是 G 的特征标.

(c) 在 (a) 与 (b) 中, $\chi \in \mathrm{Irr}_F G \Longleftrightarrow \widehat{\chi} \in \mathrm{Irr}_F G/N$.

据引理 (4.3.3), 我们可把 χ 与 $\widehat{\chi}$ 等同起来, 于是我们有

$$\mathrm{Irr}_F G/N = \{\chi \in \mathrm{Irr}_F G | N \subseteq \ker\chi\}.$$

据此, G 的任何商群的特征标表是 G 的特征标表的一部分. 于是一旦知道了 G 的特征标表, G 的所有商群的特征标表也随之清楚了. 但在具体制作过程中, G 的商群的特征标表往往比 G 本身的特征标表容易计算. 利用 G 的商群的特征标表来计算 G 本身的特征标表是计算 G 的特征标表的常用方法 (见 (4.2.6)).

容易证明: G 是一个阿贝尔群当且仅当 G 的所有不可约复特征标是线性的 (见 §4.1 习题 3). 设 $N \lhd G$. 则从 G 的特征标表可推知 G/N 是否为阿贝尔群, 即看 G 的含 N 于核中的不可约复特征标是否都是线性的. 但在一般情形下, 由 G 的特征标表并不能推知 N 本身是否为阿贝尔群.

(4.3.4) 推论 设 G' 是群 G 的导群. 则

(a) $G' = \bigcap_{\substack{\lambda\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G\\ \lambda(\mathbf{1})=1}} \ker\lambda$.

(b) $[G:G']$ 等于 G 的线性复特征标个数.

证 如 λ 是 G 的线性特征标, 则 λ 是从 G 到 $\mathbb{C}^*$ 的阿贝尔乘法群的同态. 这里 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$. 因此 $G'\subseteq\ker\lambda$. 由于 G/G' 是阿贝尔群, 所有 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G/G'$ 是线性的. 故

$$\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G/G'=\{\lambda\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G|\lambda(\mathbf{1})=1\}.$$

最后, 由引理 (4.3.2) 推出

$$N=\bigcap_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G\\ N\subseteq\ker\chi}}\ker\chi,\quad \forall N\lhd G.$$

这推出 (a).

G 的线性复特征标个数等于阿贝尔群 G/G' 的不可约复特征标的个数, 而后者等于 $|G/G'|=[G:G']$. 这证明了 (b). □

(IV) G 的特征标与 G 的中心之间的关系

$$\forall\chi\in\mathrm{ch}^+_{\mathbb{C}}(G),\ \text{定义}Z(\chi)=\{g\in G||\chi(g)|=\chi(\mathbf{1})\}.$$

(4.3.5) 引理 设 $\rho\in R_{\mathbb{C}}(G)^+$ 有特征标 χ, 令 $Z=Z(\chi)$ 与 $f=\chi(\mathbf{1})$, 则

(a) $Z=\{g\in G|\rho(g)=\epsilon\mathbf{I}$, 这里 ϵ 是 $\mathbb{C}$ 中某单位根$\}$.

(b) $Z\leqslant G$.

(c) 记 χ_Z 为 χ 在 Z 上的限制, 则 $\chi_Z=f\lambda$, 这里 λ 是 Z 的线性特征标.

(d) $Z/\ker\chi$ 是循环群.

(e) $Z/\ker\chi\subseteq Z(G/\ker\chi)$, 这里 $Z(G/\ker\chi)$ 是群 $G/\ker\chi$ 的中心.

(f) 如 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 则 $Z/\ker\chi=Z(G/\ker\chi)$.

证 (a) 由 (4.1.1) 的性质 6 推出. 现定义函数 $\lambda:Z\to\mathbb{C}$ 使满足

$$\rho(g)=\lambda(g)\mathbf{I},\quad\forall g\in Z.$$

则 $\forall g,h\in Z$, 我们有

$$\rho(gh)=\rho(g)\rho(h)=(\lambda(g)\mathbf{I})(\lambda(h)\mathbf{I})=\lambda(g)\lambda(h)\mathbf{I},$$
$$\rho(g^{-1})=(\lambda(g)\mathbf{I})^{-1}=\lambda(g)^{-1}\mathbf{I}.$$

这说明 $gh, g^{-1} \in Z$. 因而 $\lambda(gh) = \lambda(g)\lambda(h)$ 与 $\lambda(g^{-1}) = \lambda(g^{-1})$. 于是, Z 是 G 的子群, 且 λ 是 Z 的线性特征标. 我们有

$$\chi(g) = f\lambda(g), \quad \forall g \in Z.$$

这证明了 (b) 与 (c).

显然, $\ker\chi = \ker\lambda$. 故 $Z/\ker\chi$ 同构于 λ 的像, 而后者为 $\mathbb{C}$ 的 $|G|$ 次单位根组成的乘法循环群的子群. 它必是循环群. 这就推出了 (d). 又, $\ker\chi = \ker\rho$ 与 $\rho(Z) \subseteq Z(\rho(G))$, 这里 $Z(\rho(G))$ 是群 $\rho(G)$ 的中心. 于是得到 (e).

最后, 如果 $g(\ker\chi) \in Z(G/\ker\chi)$, 则 $\rho(g) \in Z(\rho(G))$. 如果 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 则由推论 (1.4.3) 与 (4.1.1) 的性质 6 知 $\rho(g) = \varepsilon\mathbf{I}$, 这里 ε 是 $\mathbb{C}$ 中某单位根. 故 (f) 可从 (a) 与 (e) 推得. □

(4.3.6) 推论 $Z(G) = \bigcap\limits_{\chi\in\mathrm{Irr}G} Z(\chi)$.

证 我们有

$$(Z(G)\ker\chi)/\ker\chi \subseteq Z(G/\ker\chi).$$

故由引理 (4.3.5)(f) 推知

$$Z(G) \subseteq Z(\chi), \quad \forall\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G.$$

反之, 设 $g \in Z(\chi)$, $\forall\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 则 $g(\ker\chi) \in Z(G/\ker\chi)$.

于是 $$[g,x] := g^{-1}x^{-1}gx \in \ker\chi, \quad \forall x \in G.$$

因此, $[g,x] \in \bigcap\limits_{\chi\in\mathrm{Irr}G} \ker\chi = \{1\}$. 这说明 g 与 x 可交换, $\forall x \in G$. 故 $g \in Z(G)$. □

$\forall\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 子群 $Z(\chi)$ 可由 G 的特征标表求得. 于是 G 的中心 $Z(G)$ 也可从 G 的特征标表求得. 由此可知: 利用 G 的特征标表, 我们可用下法推知 G 是否为幂零群: 先找到 $Z_0 = Z(G)$. 从 G 的特征标表得出商群 $G/Z(G)$ 的特征标表. 由后者又可求得 $Z(G/Z(G))$. 令 $Z(G/Z(G))$ 在 G 中的原像为 Z_1. 再从 Z_1 出发重复同样的过程. 这样得到 G 的上中心列. 熟知 G 是幂零群当且仅当 G 的上中心列终止于 G.

(V) 计算群代数中心的结构常数.

设 $F \subseteq \mathbb{C}$ 是 G 的分裂域.

我们已经知道群代数 $F[G]$ 的中心有 F 基

$$\left\{K_i = \sum_{x\in\mathscr{C}_i} x \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant s\right\},$$

这里 $\mathscr{C}_1 = \{1\}, \mathscr{C}_2, \cdots, \mathscr{C}_s$ 是 G 的所有共轭类. 我们有乘法关系式

$$K_i K_j = \sum_k c_{ijk} K_k, \tag{6}$$

这里结构常数 $\{c_{ijk}\}$ 是满足以下等式的非负整数:

$$c_{ijk} = |X_{ijk}|.$$

$X_{ijk} = \{(x, y) \in G \times G | x \in \mathscr{C}_i, y \in \mathscr{C}_j, xy = z\}$, z 是 $\mathscr{C}_k$ 中某固定元素.

设 $\rho_1, \cdots, \rho_s$ 是 G 的不可约 F 表示, 则 $\rho_m(K_i)$ 属于 $\rho_m(F[G])$ 的中心. 据定理 (3.2.3)(c) 知

$$\rho_m(K_i) = \omega_i^{(m)} \mathbf{I}, \quad 1 \leqslant i, m \leqslant s,$$

这里 $\omega_i^{(m)} \in F$. 两边取迹得

$$h_i \chi_{mi} = \omega_i^{(m)} \chi_{m1}.$$

于是 $\quad \omega_i^{(m)} = \dfrac{h_i \chi_{mi}}{\chi_{m1}}, 1 \leqslant i, m \leqslant s.$ (7)

另一方面, 以 ρ_m 作用于 (6) 式的两边得

$$\omega_i^{(m)} \omega_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk} \omega_k^{(m)}, \ 1 \leqslant m \leqslant s. \tag{8}$$

由于对于每个固定的数 m, 在 $\omega_1^{(m)}, \cdots, \omega_s^{(m)}$ 中至少存在一个非零元, 这推出以 $(\delta_{jk}\omega_i^{(m)} - c_{ijk})_{1 \leqslant j,k \leqslant s}$ 为系数矩阵的 s 个线性齐次方程组有非平凡解 $\{\omega_k^{(m)} | 1 \leqslant k \leqslant s\}$. 于是 $\det(\delta_{jk}\omega_i^{(m)} - c_{ijk}) = 0$. 故元素 $\{\omega_i^{(1)}, \cdots, \omega_i^{(s)}\}$ 是 $s \times s$ 矩阵 $(c_{ijk})_{1 \leqslant j,k \leqslant s}$ 的特征值.

下面我们要证明:(6) 式中结构常数 $\{c_{ijk}\}$ 可直接从 G 的特征标表得到.

(4.3.7) 命题 $\forall 1 \leqslant i, j, k \leqslant s$, 等式

$$c_{ijk} = \frac{h_i h_j}{|G|} \sum_{m=1}^{s} \frac{\chi_{mi} \chi_{mj} \overline{\chi_{mk}}}{\chi_{m1}} \tag{9}$$

成立.

证 由 (7) 式与 (8) 式得: $h_i h_j \chi_{mi} \chi_{mj} = \chi_{m1} \sum\limits_{k=1}^{s} c_{ijk} h_k \chi_{mk}$.

两边乘以 $\dfrac{\overline{\chi_{ml}}}{\chi_{m1}}$ 且在 m 上取和, 则由定理 (4.2.5) 推出

$$(\chi_{m1})^{-1} h_i h_j \sum_{m=1}^{s} \chi_{ml} \chi_{mj} \overline{\chi_{ml}} = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk} h_k \sum_{m=1}^{s} \chi_{mk} \overline{\chi_{ml}} = c_{ijl} h_l \frac{|G|}{h_l}.$$

由此立得命题的结论. □

由命题 (4.3.7) 知 $\{c_{ijk}\}$ 由 G 的特征标表, 常数 $|G|$ 与 $\{h_i|1 \leqslant i \leqslant s\}$ 所确定. 而由 (I) 知 $|G|$ 与 $\{h_i\}$ 也可从 G 的特征标表得到. 故 $\{c_{ijk}\}$ 可由 G 的特征标表确定.

反之, 由 $\{c_{ijk}\}$ 也可计算出 G 的特征标表.

(4.3.8) 命题 关于 $F[G]$ 的中心的结构常数 $\{c_{ijk}\}$ 的知识等价于关于 G 的特征标表 (χ_{ij}) 的知识.

证 我们已经证明由 (χ_{ij}) 可算出 $\{c_{ijk}\}$. 现设 $\{c_{ijk}\}$ 已知. 先来确定常数 $\{\omega_i^{(m)}\}$.

令 $\mathbf{A}_i$ 为 $s \times s$ 矩阵 $(c_{ijk})_{j,k}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. 设 $\omega_m = \begin{pmatrix} \omega_1^{(m)} \\ \omega_2^{(m)} \\ \vdots \\ \omega_s^{(m)} \end{pmatrix}$, $1 \leqslant m \leqslant s$. 注意 $\omega_1^{(m)} = 1$, $\forall 1 \leqslant m \leqslant s$. 由 (8) 式知

$$\mathbf{A}_i \omega_m = \omega_i^{(m)} \omega_m, \quad 1 \leqslant i, m \leqslant s.$$

则 ω_m 是矩阵 $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_s$ 的特征值分别为 $\omega_1^{(m)}, \cdots, \omega_s^{(m)}$ 的公共特征向量.

我们断言: 在允许相差一个纯量倍的意义下, 向量 $\{\omega_m|1 \leqslant m \leqslant s\}$ 是矩阵 $\{\mathbf{A}_i|1 \leqslant i \leqslant s\}$ 的仅有公共特征向量, 即任何其它公共特征向量只能是 $\{\omega_m|1 \leqslant m \leqslant s\}$ 中某一向量的纯量倍. 令 V 为 F 上 s 个列向量 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 张成的空间, 并把 $\{\mathbf{A}_i\}$ 看作 V 上线性变换. 则由 (8) 式推出 $\{\omega_m|1 \leqslant m \leqslant s\}$ 是 F 上线性无关向量集合. 故

$$V = \bigoplus_{m=1}^{s} F\omega_m.$$

由定义知矩阵 $\{\mathbf{A}_i\}$ 提供 F 代数 $Z = Z(F[G])$ 关于基 $\{K_i\}$ 的正则矩阵表示. 故有关于 V 上线性变换的关系式

$$\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \sum_k c_{ijk} \mathbf{A}_k.$$

这推出映射 $K_i \longmapsto \mathbf{A}_i, 1 \leqslant i \leqslant s$, 定义了 Z 在 V 上的一个表示. 进而, 子空间集合 $\{F\omega_m|1 \leqslant m \leqslant s\}$ 提供了 Z 的 s 个一维表示. 由于对于 $m \neq n$, 不可能有

$$\omega_i^{(m)} = \omega_i^{(n)}, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant s,$$

故这 s 个一维表示两两互异. 因而这些一维表示组成了 Z 的不可约表示的代表系. 因为矩阵 $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_s$ 的任何公共特征向量 ν 提供了 Z 的不可约 (一维) 表示, 所以 ν 必须是 $\{\omega_m|1 \leqslant m \leqslant s\}$ 中某一向量的纯量倍.

由于列向量 ω_m 的第一个系数 $\omega_1^{(m)}$ 均为 1, $\{\omega_1,\cdots,\omega_s\}$ 是矩阵集合 $\{\mathbf{A}_i|1\leqslant i\leqslant s\}$ 所唯一确定的具有这种性质的公共特征向量集合. 因此 $\{\omega_i^{(m)}|1\leqslant i,m\leqslant s\}$ 可由 $\{c_{ijk}\}$ 计算而得. 再由 (7) 式知:

$$\omega_i^{(m)}=\frac{h_i\chi_{mi}}{\chi_{m1}},\quad 1\leqslant i,m\leqslant s.$$

由于

$$c_{ij1}=\begin{cases}h_i, & \text{如果}\mathscr{C}_j^{-1}=\mathscr{C}_i,\\ 0, & \text{如果}\mathscr{C}_j^{-1}\neq\mathscr{C}_i,\end{cases}$$

这里 $\mathscr{C}_j^{-1}=\{x^{-1}|x\in\mathscr{C}_j\}$, 数集 $\{h_i\}$ 可由 $\{c_{ijk}\}$ 所确定, 故数集 $\left\{\dfrac{\chi_{mi}}{\chi_{m1}}\middle|1\leqslant i,m\leqslant s\right\}$ 也可由 $\{c_{ijk}\}$ 所确定. 最后由推论 (4.2.3) 知

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\chi_{mi}}{\chi_{m1}}\cdot\overline{\omega_i^{(m)}}=\frac{|G|}{(\chi_{m1})^2}.$$

于是次数 $\{\chi_{m1}\}$ 可由 $\{c_{ijk}\}$ 所确定. 因此特征标表 (χ_{ij}) 也可从 $\{c_{ijk}\}$ 计算而得. □

习　题

1. 证明 G 的导群可由 G 的特征标表确定.

2. $\forall x,y\in G$, 写 $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$.

(a) 令 $x,g\in G$. 则存在 $y\in G$ 使 g 共轭于 $[x,y]$ 当且仅当 $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G}\frac{|\chi(x)|^2\overline{\chi(g)}}{\chi(1)}\neq 0$.

(b) 令 $g\in G$. 则存在 $x,y\in G$ 使 $g=[x,y]$ 当且仅当 $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G}\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\neq 0$.

3. 设 χ 是 G 的忠实特征标 (即 $\ker\chi=\{1\}$). 则 H 是 G 的阿贝尔子群当且仅当 χ_H 的每个不可约分量是线性的.

4. 设 $G=H\times K$. 令 $\varphi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$ 与 $\psi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}K$. 则 $\varphi\#\psi$ 是忠实的 $\Leftrightarrow$ $(|Z(H)|,|Z(K)|)=1$.

5. 设 $H\leqslant G,\chi\in\mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$. 则

(a) $(\chi_H,\chi_H)\leqslant[G:H](\chi,\chi)$.

(b) 如 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 则 $\chi(1)^2\leqslant[G:Z(\chi)]$. 等号成立当且仅当 $\chi(g)=0,\forall g\in G-Z(\chi)$.

6. 设 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G, G/Z(\chi)$ 是阿贝尔群. 则 $[G:Z(\chi)]=\chi(1)^2$.

§4.4 特征标值的整性

为了讨论特征标值的整性, 让我们先推广通常意义上的整数概念.

设 R 是交换环, A 是任意环. 如果存在环同态 $\psi: R \to Z(A)$ 使得 $\psi(1_R) = 1_A$, 则 A 有 R 模结构

$$ax := \psi(a)x,$$

且满足 $a(xy) = (ax)y = x(ay)$, $\forall a \in R,\ x, y \in A$, 称 A 为 R **代数**. 显然, R 代数是 F 代数概念的推广.

(4.4.1) 定义 设 A 是 R 代数, $\alpha \in A$. 如存在首一多项式 $f(x) \in R[x]$ 使得 $f(\alpha) = 0$, 则称 α 为 R **整数**.

(4.4.2) 引理 设 A 是 R 代数, $\alpha \in A$. 则下述条件等价:

(a) α 是 R 整数.

(b) $R[\alpha]$ 是有限生成 R 模.

(c) 存在 A 的 R 子代数 B 使 $\alpha \in B$, 且 B 是 A 的有限生成 R 子模.

如 R 代数 A 作为环是交换的, 则称 A 为**交换 R 代数**.

(4.4.3) 推论 交换 R 代数 A 的所有 R 整数集合形成 A 的 R 子代数.

上述引理及其推论的证明留给读者作为练习.

(4.4.4) 定义 设 A 是 R 代数. 称 A 的所有 R 整数集合为 R 在 A 中的**整闭包**. 如 R 在 A 中的整闭包等于 $R1_A$, 则称 R 在 A 中**整闭**. 如 R 是整环, K 是 R 的分式域, 则 K 有自然的 R 代数结构. 如 R 在 K 中整闭, 则称 R 为**整闭的**.

熟知唯一因式分解整环是整闭的. 特别, 整数环 $\mathbb{Z}$ 是整闭的.

称 $\mathbb{C}$ 中所有 $\mathbb{Z}$ 整数为**代数整数**. 这些代数整数全体形成环, 记作$\mathbf{I}$. 由 $\mathbb{Z}$ 的整闭性知 $\mathbf{I} \bigcap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. 显然, $\mathbb{C}$ 的所有单位根都属于 $\mathbf{I}$. 于是由 (4.1.1) 的性质 6 知: 每个 $\chi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$ 的值域属于 $\mathbf{I}$.

设 $(\rho, V) \in \overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G$ 有特征标 χ, ρ 可被看作 $\mathbb{C}[G]$ 的不可约表示. 由推论 (1.4.3) 知

$$\rho(z) = \omega(z)\mathbf{1}_V, \quad \forall z \in Z(\mathbb{C}[G]),$$

这里 $\omega(z) \in \mathbb{C}$, $\mathbf{1}_V$ 是 V 上恒等变换. 为表明 ω 依赖于 χ 起见, 我们也以 ω_χ 记 ω. 由于

$$\rho: \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}V$$

是代数同态, $\omega: Z(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$ 也是代数同态. 特别, ω 是 $\mathbb{C}$ 线性的. 令 $\mathscr{C}$ 为 G 的一个共轭类. $K = \sum_{g \in \mathscr{C}} g$ 为对应于 $\mathscr{C}$ 的类和. 则 $K \in Z(\mathbb{C}[G])$. 由

$\rho(K) = \omega(K)\mathbf{1}_V$ 得知

$$\chi(\mathbf{1})\omega(K) = \chi(K) = \sum_{x\in\mathscr{C}} \chi(x) = |\mathscr{C}|\chi(g), \quad \forall g \in \mathscr{C}.$$

于是
$$\omega(K) = \frac{\chi(g)|\mathscr{C}|}{\chi(\mathbf{1})}, \quad \forall g \in \mathscr{C}. \tag{1}$$

(4.4.5) 定理 对于任何 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 与 G 的类和 $K \in \mathbb{C}[G]$, $\omega_\chi(K)$ 是代数整数.

证 设 $\mathscr{C}_1, \cdots, \mathscr{C}_s$ 是 G 的共轭类, 其对应的类和分别是 $K_1, \cdots, K_s$. 由 §4.3 里的等式 (6) 推出

$$K_iK_j = \sum_v c_{ijv}K_v, \quad 这里\ c_{ijv} \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\omega = \omega_\chi : Z(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$ 是代数同态, 我们有

$$\omega(K_i)\omega(K_j) = \sum_v c_{ijv}\omega(K_v). \tag{2}$$

令 S 为由所有 $\omega(K_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, 的整线性组合形成的集合. 则由 (2) 式知 S 在乘法下封闭. 因 $\omega(1) = 1$, 所以 $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$. 由于 S 作为 $\mathbb{Z}$ 模是有限生成的, 引理 (4.4.2) 告诉我们: S 的所有元素都是代数整数. 特别, $\omega_\chi(K)$ 是代数整数. □

下面我们将利用特征标的整性导出关于群 G 的不可约特征标次数的一些结果.

(4.4.6) 定理 $\forall\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 我们有 $\chi(\mathbf{1})||G|$.

证 由特征标的正交关系得: $|G| = \sum_{g\in G}\chi(g)\chi(g^{-1})$. 现在要以 ω_χ 来改写此等式. 沿用定理 (4.4.5) 证明中的记号 $\mathscr{C}_i, K_i, 1 \leqslant i \leqslant s$. 令 $g_i \in \mathscr{C}_i$. 则由 (1) 式得

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} |\mathscr{C}_i|\chi(g_i)\chi(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{s} \chi(\mathbf{1})\omega_\chi(K_i)\chi(g_i^{-1}).$$

于是
$$\frac{|G|}{\chi(\mathbf{1})} = \sum_{i=1}^{s} \omega_\chi(K_i)\chi(g_i^{-1}) \in \mathbf{I}\bigcap\mathbb{Q} = \mathbb{Z}.$$

这推出 $\chi(\mathbf{1})||G|$. □

定理 (4.4.6) 的结果可被进一步强化.

(4.4.7) 定理 $\forall\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 我们有 $\chi(\mathbf{1})|[G : Z(\chi)]$.

证 把 χ 看作商群 $G/\mathrm{Ker}\,\chi$ 的特征标. 故可不失一般性地假设 $\mathrm{Ker}\chi=\{1\}$. 此时, $Z(G)=Z(\chi)$.

$\forall x,y\in G$, 定义关系 $x\equiv y$, 如存在 $z\in Z=Z(G)$ 使 x 与 yz 在 G 中共轭. 易见 $\equiv$ 是 G 上的等价关系. 我们断言: 如 $x\equiv y$, 则 $|\chi(x)|=|\chi(y)|$. 这因为: 由引理 (4.3.5)(c) 知 $\chi_Z=\chi(1)\lambda$ (注: χ_Z 为 χ 在 Z 上的限制), 这里 λ 是 Z 的一个忠实线性特征标. 同时有

$$\chi(yz)=\lambda(z)\chi(y),\quad \forall z\in Z, y\in G.$$

如 $x\equiv y$, 则对于某 $z\in Z$ 与 $g\in G$, 我们有

$$g^{-1}xg=yz.$$

因此 $\chi(x)=\lambda(z)\chi(y)$. 因为 $|\lambda(z)|=1$, 所以断言正确.

设 $\overline{\mathscr{C}}_1,\overline{\mathscr{C}}_2,\cdots,\overline{\mathscr{C}}_r$ 是 G 的所有使 χ 取非零值的 $\equiv$ 等价类, 则有

$$|G|=\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=\sum_{i=1}^{r}|\overline{\mathscr{C}}_i||\chi(g_i)|^2,$$

这里 g_i 是 $\overline{\mathscr{C}}_i$ 的代表元. 令 $\mathrm{Cl}\,(g_i)$ 为 G 的含 g_i 的共轭类, 我们断言:

$$|\overline{\mathscr{C}}_i|=|\mathrm{Cl}(g_i)||Z|.$$

这因为: $\overline{\mathscr{C}}_i$ 中每个元素 x 有形状 yz, 这里 $y\in\mathrm{Cl}(g_i)$, $z\in Z$. 故只要证明: $\forall y,y'\in\mathrm{Cl}(g_i)$ 与 $z,z'\in Z$,

$$yz=y'z'\Longrightarrow y=y'\text{与}z=z'.$$

由于 $\chi(y)\lambda(z)=\chi(y')\lambda(z')$ 与 $\chi(y)=\chi(y')=\chi(g_i)\neq 0$, 我们有 $\lambda(z)=\lambda(z')$. 因为 λ 在 Z 上忠实, 所以 $z=z'$, 这推出 $y=y'$, 断言正确.

于是有

$$\begin{aligned}|G|&=\sum_{i=1}^{r}|\overline{\mathscr{C}}_i||\chi(g_i)|^2=\sum_{i=1}^{r}|\mathrm{Cl}(g_i)|\chi(g_i)\chi(g_i^{-1})|Z|\\&=\sum_{i=1}^{r}\chi(1)\omega_\chi(K_i)\chi(g_i^{-1})|Z|,\end{aligned}$$

这里 $K_i=\sum\limits_{g\in\mathrm{Cl}(g_i)}g$. 这推出

$$\frac{[G:Z]}{\chi(1)}=\sum_{i=1}^{r}\omega_\chi(K_i)\chi(g_i^{-1})\in\mathbf{I}\bigcap\mathbb{Q}=\mathbb{Z},$$

即 $\chi(1)|[G:Z]$. 据本证明开始时的说明, 我们得

$$\chi(1)|[G:Z(\chi)].$$

□

(4.4.8) 推论 $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 我们有 $\chi(1) | [G : Z(G)]$.

证 因为 G 的中心 $Z(G)$ 含于每一个 $Z(\chi)$ 中, 所以结论可立即从定理 (4.4.7) 推出. □

用特征标的整性理论证明著名的 Burnside 可解性定理历来被认为是表示论在群论上应用的一个成功范例. 下面将给出这一证明. 为此需要两个预备定理.

(4.4.9) 定理 (Burnside) 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, $\mathscr{C}$ 是 G 的共轭类, $g \in \mathscr{C}$. 假设 $(\chi(1), |\mathscr{C}|) = 1$. 则要么 $g \in Z(\chi)$, 要么 $\chi(g) = 0$.

证 由 (1) 式与定理 (4.4.5) 知, $\dfrac{\chi(g)|\mathscr{C}|}{\chi(1)}$ 是代数整数. 由于 $(\chi(1), |\mathscr{C}|) = 1$, 存在 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使等式 $u\chi(1) + v|\mathscr{C}| = 1$ 成立. 因此

$$\frac{\chi(g)(1 - u\chi(1))}{\chi(1)} = \frac{vx(g)|\mathscr{C}|}{\chi(1)}$$

是代数整数. 显然 $u\chi(g)$ 也是代数整数. 这推出 $\alpha = \chi(g)/\chi(1)$ 是代数整数. 设 $g \notin Z(\chi)$, 则由 (4.1.1) 的性质 6 知

$$|\chi(g)| < \chi(1).$$

因此 $|\alpha| < 1$.

令 n 为元素 g 的阶数. 令 E 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上多项式 $x^n - 1$ 在 $\mathbb{C}$ 中的分裂域. 则 $\alpha \in E$. 设 H 是 E 在 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗华群. 由于 $\chi(g)$ 是 $\chi(1)$ 个单位根的和, 我们看到: $\forall \sigma \in H$, $\sigma(\chi(g))$ 也是 $\chi(1)$ 个单位根的和. 这推出: $\forall \sigma \in H$, 我们有 $|\sigma(\chi(g))| \leqslant \chi(1)$, 因此 $|\sigma(\alpha)| \leqslant 1$. 这推出: $\left|\prod\limits_{\sigma \in H} \sigma(\alpha)\right| < 1$.

我们知道: $\forall \sigma \in H$, $\sigma(\alpha)$ 与 α 满足同一个有理系数的不可约多项式, 因此 $\sigma(\alpha)$ 也是代数整数. 于是 $\beta = \prod\limits_{\sigma \in H} \sigma(\alpha)$ 是代数整数. 但显然 β 被所有 $\sigma \in H$ 所固定. 据伽罗华理论知: $\beta \in \mathbb{Q} \bigcap \mathrm{I} = \mathbb{Z}$, 即 $\beta \in \mathbb{Z}$. 又因为 $|\beta| < 1$, 所以 $\beta = 0$. 这推出: 存在某 $\sigma \in H$ 使等式 $\sigma(\alpha) = 0$ 成立. 因此 $0 = \alpha = \dfrac{\chi(g)}{\chi(1)}$, 也即 $\chi(g) = 0$. □

(4.4.10) 定理 设 G 是非阿贝尔单群, 则 $\{1\}$ 是 G 的基数为素数幂的仅有共轭类.

证 设 $g \in G$, $|\mathrm{Cl}(g)| = p^a$ 与 $g \neq 1$, 这里 p 是素数, a 是某正整数. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G, \chi \neq 1_G$ (1_G 是 G 的单位特征标). 则由 G 为单群的假设知 $\mathrm{Ker}\ \chi = \{1\}$.

又因 G 不是阿贝尔群, 故由引理 (4.3.5)(e), 我们有 $Z(\chi) = Z(G) = \{1\}$. 因此如 $p \nmid \chi(1)$, 则从定理 (4.4.9) 推知 $\chi(g) = 0$. 有

$$0 = \chi_{\mathrm{reg}}(g) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr} G} \chi(1)\chi(g) = 1 + \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr} G \\ p \mid \chi(1)}} \chi(1)\chi(g).$$

记 $\alpha = \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr} G \\ p \mid \chi(1)}} \frac{\chi(1)}{p}\chi(g)$. 则 α 是代数整数. 因为 $p\alpha = -1$, 所以 $-\frac{1}{p} = \alpha \in \mathbf{I} \bigcap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. 但这是不可能的. 故定理得证. □

现在我们可以着手证明 Burnside 的可解性定理了.

(4.4.11) 定理 设 $|G| = p^a q^b$, 这里 p, q 都是素数, a, b 都是非负整数. 则 G 是可解群.

证 当 $p = q$ 或 $ab = 0$ 时结论显然. 现设 $p \neq q$ 与 $ab \neq 0$. 在 $|G|$ 上运用归纳法. 可设 $|G| > 1$. 取 G 的极大正规真子群 N. 如 $|N| > 1$, 则由归纳假设知 N 与 G/N 都可解, 因此 G 也可解.

现设 $N = \{1\}$, 则 G 是单群. 设 $P \neq \{1\}$ 是 G 的一个 Sylow 子群. 可取 $g \in Z(P)$ 使 $g \neq 1$, 则 $|\mathrm{Cl}(g)| = [G : C_G(g)]$ 整除 $[G : P]$, 所以 $|\mathrm{Cl}(g)|$ 是素数幂. 于是由定理 (4.4.10) 推出单群 G 是阿贝尔群. 故 G 仍是可解群. □

习 题

1. 试给出引理 (4.4.2) 与推论 (4.4.3) 的证明.

2. 设 G 是 p 群, $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$. 证明: $\chi(1)^2 | [G : Z(\chi)]$.

3. (L. Solomon) 证明特征标表的每行和为非负有理整数.

提示 让 G 共轭地作用于其本身, 考虑由此而得到的置换特征标.

注 特征标表的每列和也是整数, 但可能是负数.

4. (Burnside) 令 $|G|$ 为奇数, $1_G \neq \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$. 试证 $\chi \neq \overline{\chi}$.

提示 利用特征标的正交关系证明: 如 $\chi \neq 1_G$ 与 $\chi = \overline{\chi}$, 则 $\chi(1) = 2\alpha$, 这里 α 是某代数整数.

5. 对于群 G 的特征标 χ, 记 $T(\chi) = \{x \in G | \chi(x) = 0\}$ 和 $U(\chi) = \{x \in G || \chi(x)| = 1\}$. 证明:

(a) $T(\chi)$ 和 $U(\chi)$ 是 G 的一些共轭类的并.

(b) 如果 $M \in \{T(\chi), U(\chi)\}$ 和 $x \in M$, 则循环群 $\langle x \rangle$ 的每个生成元都属于 M.

(c) 如果 $x \in U(\chi)$, 则 $\chi(x)$ 是单位根.

6. (A.I. Veitsblit) 设 $H \leqslant G$ 和 $\chi \in \overline{\mathrm{Irr}}(G)$. 则 $(\chi_H, \chi_H) \leqslant 1 + \frac{|T(\chi) \backslash H|}{|H|}$, 等号成立当且仅当 $G \backslash H \subseteq T(\chi) \bigcup U(\chi)$, 这里 $X \backslash Y$ 表集合 X 关于 Y 的差集.

提示 置 $\Delta = G\backslash(H\bigcup T(\chi))$. 则

$$(\chi_H,\chi_H)=\frac{1}{|H|}\sum\nolimits_{x\in G}|\chi(x)|^2-\frac{1}{|H|}\sum\nolimits_{x\in\Delta}|\chi(x)|^2=[G:H]-\frac{1}{|H|}\sum\nolimits_{x\in\Delta}|\chi(x)|^2.$$

我们有

$$[G:H]=1+\frac{|T(\chi)\backslash H|}{|H|}+\frac{|\Delta|}{|H|}.$$

当 $\Delta=\varnothing$ 时有 $(\chi_H,\chi_H)=1+\dfrac{|T(\chi)\backslash H|}{|H|}$, 此时 $G\backslash H\subseteq T(\chi)\bigcup U(\chi)$. 现设 $\Delta\neq\varnothing$. 则

$$(\chi_H,\chi_H)=1+\frac{|T(\chi)\backslash H|}{|H|}-|\Delta||H|^{-1}(|\Delta|^{-1}\sum\nolimits_{x\in\Delta}|\chi(x)|^2-1).$$

由特征标值的整性可推出 $|\Delta|^{-1}\sum_{x\in\Delta}|\chi(x)|^2\geqslant 1$, 进而推出不等式

$$(\chi_H,\chi_H)\leqslant 1+\frac{|T(\chi)\backslash H|}{|H|}.$$

易见 $G\backslash H\subseteq T(\chi)\bigcup U(\chi)$ 当且仅当 $\Delta\subseteq U(\chi)$. 可证后者成立当且仅当 $(\chi_H,\chi_H)=1+\dfrac{|T(\chi)\backslash H|}{|H|}$.

7. 设 $\chi\in \mathrm{Irr}(G), \deg\chi>1$. 记 $N(\chi)=\langle T(\chi)\rangle$.

(a) 证明: $Z(\chi)T(\chi)=T(\chi)$ 和 $Z(\chi)U(\chi)=U(\chi)$. 进而证明: $|Z(\chi)|$ 整除 $|T(\chi)|$.

(b) 证明: (i) $N(\chi)\lhd G$. (ii) $\chi_{N(\chi)}\in \mathrm{Irr}(N(\chi))$.

(iii) $G\backslash N(\chi)\subseteq U(\chi)$. (iv) $Z(G)\subseteq Z(N(\chi))\subseteq Z(\chi)\subset N(\chi)$.

提示 运用习题 6 的结论.

8. 如 G 的某共轭类的元素个数是素数幂, 则 G 不是单群.

§4.5 分裂域上的特征标理论

我们在 §3.2 里已讨论过群在分裂域上表示的一些性质. 现在让我们运用特征标理论来研究这方面的进一步性质. 像在 §3.2 中那样, 当谈及群 G (或群代数 $F[G]$) 的表示 ρ 时, 总假定已选定了 ρ 的表示空间的一组基 B. 把 ρ 与 ρ_B 等同起来, 故可称 "矩阵 $\rho(g)$", $\forall g\in G$.

(4.5.1) 命题 设 $\mathbb{Q}\subset F\subset\mathbb{C}$, 则

F 是 G 的分裂域 $\Longleftrightarrow \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G=\mathrm{Irr}_F G$.

证 ($\Longrightarrow$) 这可由推论 (3.2.10) 推出.

($\Longleftarrow$) 设 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G=\mathrm{Irr}_F G$. 令 $\rho\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G$. 则存在 $\eta\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 $\eta^{\mathbb{C}}$ 与 ρ 有相同的特征标. 由 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 中元素的正交关系知: ρ 是 $\eta^{\mathbb{C}}$ 的唯一不可约分支, 其在 $\eta^{\mathbb{C}}$ 中出现的重数为 1. 于是 $\eta^{\mathbb{C}}\sim\rho$. 现在我们的结果可从定理 (3.2.11) 推出. □

下面的结果即使不作 E 是分裂域的假设也仍然成立. 今后我们要证这更一般性的结果.

(4.5.2) 引理 *设 E 是 G 的分裂域. 则 $\mathrm{Irr}_E G$ 的元素都非零, 互异及 E 线性无关.*

证 令 $\overline{\mathrm{Irr}}_E G=\{\rho_i\}$. 令 χ_i 为 ρ_i 的特征标. 把 χ_i 扩充为 $E[G]$ 的特征标, 后者仍记作 χ_i. 因 E 是 G 的分裂域, 故由定理 (3.2.3) 知

$$\rho_i(E[G])\cong M_{n_i}(E),$$

这里 $n_i=\deg\rho_i$. 于是可取 $a_i\in E[G]$ 使 $\chi_i(a_i)=1$. 据定理 (3.2.8), 可设 $\chi_j(a_i)=0$, $\forall i\neq j$. 这推出我们的结论. □

设 E 是 G 的分裂域. 接下去要证: 在某种意义下, 集合 $\mathrm{Irr}_E G$ 并不依赖于域 E. 对于 G 的特征标 χ 与域 F, 我们记 $F(\chi)$ 为由 $\{\chi(g)|g\in G\}$ 在 F 上生成的扩域.

(4.5.3) 引理 *设 E 是群 G 的分裂域, $\chi\in\mathrm{Irr}_E G$. 设 $K=K(\chi)\subseteq E$. 设 $F\supseteq K$ 是 G 的另一个分裂域. 则 $\chi\in\mathrm{Irr}_F G$.*

证 由于把 F 换为与其 K 同构的域并不影响我们的结果, 不妨设 $E,F\subseteq L$, 这里 L 是域. 由推论 (3.2.10) , L 是 G 的分裂域, 且 $\mathrm{Irr}_F G=\mathrm{Irr}_L G=\mathrm{Irr}_E G$. □

下一个结果对于研究满足条件 $\mathrm{char}.F=p>0$ 的域 F 上的表示有重要意义. 其证明依赖于一个熟知的事实: 有限整环是域.

(4.5.4) 定理 *设 ρ 是 G 的绝对不可约 E 表示, 这里 $\mathrm{char}.\,E=p>0$. 设 χ 是 ρ 的特征标. 令 F 为 E 的子域, 满足 $F=F(\chi)$. 则存在 G 的某绝对不可约 F 表示 η 使 $\rho\sim\eta^E$.*

证 先设 $|E|<\infty$. 在 $|E|$ 上运用归纳法. 不妨设 F 是 E 的极大真子域, 即 $F\subsetneqq E$, 且不存在 E 的子域 L 使 $F\subsetneqq L\subsetneqq E$. 令 A 为由矩阵 $\rho(g),g\in G$, 的所有 F 线性组合所组成的集合. 则 A 是矩阵代数 $M_n(E)$ 的 F 子代数, 这里 $n=\deg\rho$. 如 $a\in Z(A)$, 则 a 是与所有 $\rho(g),g\in G$, 相交换的 E 上矩阵. 由于 ρ 是绝对不可约的, a 必须是纯量矩阵. 于是 $F1\subseteq Z(A)\subseteq E1$. 这推出 $Z(A)$ 是有限整环, 因而必须是域. 但 F 是 E 的极大真子域. 故要么 $Z(A)=F1$, 要么 $Z(A)=E1$.

如 $Z(A)=E1$, 则 $A=EA=\rho(E[G])$. 因 ρ 是绝对不可约的, 所以由定理 (3.2.3) 知: $A=M_n(E)$. 于是如 $\alpha\in E-F$, 则可取 $a\in A$ 使 $\mathrm{tr}.\,a=\alpha$. 但 a 是矩阵 $\rho(g)$, $g\in G$, 的 F 线性组合, 其迹必须属于 F. 这个矛盾说明 $Z(A)=F1$.

其次, 我们断言: 存在某正整数 k 使有 F 代数同构

$$A\cong M_k(F).$$

为了证明该断言, 我们先要证 A 是半单的, 据定理 (1.6.4), 这只须证 A 不含非零幂零理想, 如 I 是 A 的幂零理想, 则 EI 是

$$EA = \rho(E[G]) = M_n(E)$$

中的幂零理想. 因 $M_n(E)$ 是非幂零的单代数, 故 $I = 0$, 断言得证.

我们知道半单 F 代数 A 是其非零极小理想的直和. 由于 $\dim_F Z(A) = 1$, A 只含有一个直和项. 故 $A = M(A) \cong A_M$, 这里 M 是某不可约 A 模. 令 $D = \mathrm{End}_A M$. 由引理 (1.4.2) 知 D 是可除环. 因为 $\dim_F M = k < \infty$ 与 $|F| < \infty$, 我们有 $|D| < \infty$. 故 D 是域.

据定理 (1.7.2), 我们有 $A_M = \mathrm{End}_D M$. 于是 $D \subseteq Z(A_M) \cong F$. 因 D 含 M 上所有 F 纯量算子, 这推出 $D = F\mathbf{1}$ 及

$$A \cong A_M = \mathrm{End}_D M = \mathrm{End}_F M \cong M_k(F).$$

我们有 F 代数同构 $\varphi : A \xrightarrow{\sim} M_k(F)$. 故

$$\eta = \varphi\rho : F[G] \to M_k(F)$$

是 $F[G]$ 的表示. 由 η 的满射性推知 η 是绝对不可约的.

我们断言: $\eta^E \sim \rho$. 这因为: 令 $\tau \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 $\rho \leqslant \tau^E$. 如 $\tau \nsim \eta$, 由定理 (3.2.8), 可取 $b \in F[G]$ 使 $\tau(b) = 0$ 与 $\eta(b) \neq 0$. 因 $\rho \leqslant \tau^E$, 我们有 $\rho(b) = 0$, 故 $\eta(b) = \varphi(\rho(b)) = 0$. 这个矛盾说明 $\eta \sim \tau$ 及 $\rho \leqslant \eta^E$. 因 η 是绝对不可约的, 故断言成立. 因此本定理当 E 是有限域时成立.

现考虑当 E 是无限域时的情形. 因可以较大的域来代替 E 而不影响我们的证明. 不妨设 E 是代数闭域. 令 K 为 E 的素子域 (即由 p 个元素组成的子域). 据命题 (3.2.13), 存在 G 的分裂域 $L \supseteq K$ 使 $[L : K] < \infty$. 由于 E 是代数闭域, 可设 $L \subseteq E$, 则存在 $\tau \in \overline{\mathrm{Irr}}_L G$ 使 $\rho \sim \tau^E$, 这里 τ 的特征标 χ 在 $L \bigcap F$ 中取值.

因为 $|L| < \infty$, 第一部分的证明告诉我们: 存在绝对不可约 $L \bigcap F$ 表示 η 使 $\eta^L \sim \tau$, 于是 $\eta^E \sim \rho$. 因此 η 为所要求的 F 表示. □

以后, 在推论 (4.5.13) 中要证明: 当条件 “ρ 是绝对不可约的” 减弱为 “ρ 是不可约的” 时, 定理 (4.5.4) 的结论依然成立.

称 G 的元素阶数的最小公倍数为 G 的**指数**. 显然, G 的指数是 $|G|$ 的因子.

(4.5.5) 推论　设 G 有指数 n. 设多项式 $x^n - 1$ 在 F 中分裂成一次因子的乘积. 如 char. $F = p > 0$, 则 F 是 G 的分裂域.

证　设 $E \supseteq F$ 是 G 的分裂域, $\chi \in \mathrm{Irr}_E G$. 则 $\chi(g)$ 是 n 次单位根的和. 故 $\chi(g) \in F$. 因此我们的结论可从定理 (4.5.4) 与 (3.2.11) 推出. □

上述推论当 char. $F=0$ 时也成立. 其证明要用到 Brauer 的诱导特征标定理. 故留待以后再讨论.

设 E 是域, $\sigma\in\text{Aut}(E)$, 这里 $\text{Aut}(E)$ 是 E 的自同构群. 又设 ρ 是 G 的 E 矩阵表示: $\forall g\in G$,

$$\rho(g)=(a_{ij}(g)),\quad a_{ij}(g)\in E.$$

今定义 $\rho^\sigma(g)=(\sigma(a_{ij}(g)))$. 则 ρ^σ 也是 G 的 E 矩阵表示. 类似地, 如 $\tau:G\to E$ 是一个函数, 则定义

$$\tau^\sigma(g):=\sigma(\tau(g)),\quad \forall g\in G.$$

设 ρ 的特征标 χ 在 $F\subseteq E$ 中取值. 令 $\lambda\in\text{Aut}(F)$. 现要问: χ^λ 是否一定属于 $\text{ch}_E^+(G)$?

(4.5.6) 引理 *设 E 是 G 的分裂域, $\chi\in\text{Irr}_E G$. 设 $F=F(\chi)\subseteq E$. 令 $\tau\in\text{Aut}(F)$. 则 $\chi^\tau\in\text{Irr}_E G$.*

证 设 $\overline{E}$ 是 E 的代数闭域. $\overline{F}\subseteq\overline{E}$ 是 F 的代数闭域. 则由推论 (3.2.10) 与引理 (4.5.3) 得

$$\text{Irr}_E G=\text{Irr}_{\overline{E}}G=\text{Irr}_{\overline{F}}G.$$

于是 $\chi\in\text{Irr}_{\overline{F}}G$. 因为据伽罗华理论知 τ 可扩充为 $\overline{F}$ 的自同构, 所以 $\chi^\tau\in\text{Irr}_{\overline{F}}G$. 这推出 $\chi^\tau\in\text{Irr}_E G$. □

设 E 是 K 的扩域, $\chi\in\text{ch}_E^+(G)$. 则 $K(\chi)\subseteq E$. 注意 $K(\chi)$ 属于多项式 x^n-1 在 K 上的分裂域, 这里 n 是 G 的指数. 因为 x^n-1 在 K 上的分裂域是伽罗华扩域, 它的伽罗华群是阿贝尔群. 故 $K(\chi)$ 是 K 的有限次伽罗华扩域, 其伽罗华群 $\text{Gal}\,K(\chi)/K$ 是阿贝尔群.

设 E 是 G 的分裂域, $F\subseteq E$ 与 $\chi,\psi\in\text{Irr}_E G$. 如 $F(\chi)=F(\psi)$, 且存在 $\sigma\in\text{Gal}\,F(\chi)/F$ 使 $\chi^\sigma=\psi$, 则称 χ 与 ψ **在 F 上伽罗华共轭**. 显然, 伽罗华共轭是 $\text{Irr}_E G$ 内的一种等价关系.

(4.5.7) 引理 *设 E 是 G 的分裂域, $\chi\in\text{Irr}_E G$. 令 $\Phi\subseteq\text{Irr}_E G$ 为含 χ 的 F 上伽罗华共轭类, 这里 $F\subseteq E$. 则我们有*

(a) *如 $K\subseteq E, K=K(\chi)$ 与 $\sigma\in\text{Gal}\,K/(K\bigcap F)$, 则 $\chi^\sigma\in\Phi$.*

(b) *如 $F_0\subseteq F$ 与 $\psi\in\Phi$, 则 ψ 与 χ 在 F_0 上伽罗华共轭.*

(c) $|\Phi|=[F(\chi):F]$.

证 (a) 由引理 (4.5.6) 知 $\chi^\sigma\in\text{Irr}_E G$. 今 $(K\bigcap F)(\chi)$ 是 $K\bigcap F$ 的正规扩域, 故 $(K\bigcap F)(\chi)\subseteq K$ 在 σ 的作用下不变. 不妨设 $K=(K\bigcap F)(\chi)$. 于是

$K \subseteq F(\chi)$.$F(\chi)$ 的任何真子域都不含 $F \bigcup K$. 由伽罗华理论知: 限制映射

$$\mathrm{Gal}\, F(\chi)/F \to \mathrm{Gal}\, K/(K \bigcap F),$$
$$\sigma \mapsto \sigma_K$$

是满射. 故存在某 $\tau \in \mathrm{Gal}\, F(\chi)/F$ 使 $\chi^\sigma = \chi^\tau$. 令 $F(\chi^\tau) = F(\chi)$. 因此 $\chi^\sigma = \chi^\tau \in \Phi$.

(b) 在 (a) 中以 F_0 代替 F 和以 $F(\chi)$ 代替 K 即推出 (b).

(c) Φ 是 χ 在 $\mathrm{Gal}\, F(\chi)/F$ 的作用下的轨道. 据 $F(\chi)$ 的定义知: χ 在 $\mathrm{Gal}\, F(\chi)/F$ 的稳定子是平凡子群 $\{1\}$. 故

$$|\Phi| = |\mathrm{Gal}\, F(\chi)/F| = [F(\chi) : F]. \qquad \square$$

设 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$. 设 $E \supseteq F$ 是 G 的分裂域. 我们考虑表示 ρ^E. 要证明 ρ^E 是完全可约的, 它的各个不可约分量的重数都相等. 这些分量的特征标形成 F 上的伽罗华共轭类. 它们的重数当 char. $F \neq 0$ 时都等于 1.

(4.5.8) 引理　*设 $F \subseteq E, [E:F] = n < \infty, V$ 是对应于 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_E G$ 的 $E[G]$ 模, 则 V 可被当作 $F[G]$ 模. 于是 V 对应于某 $\tau \in R_F(G)^+$.*

(a) $\deg \tau = n \deg \rho$.

(b) 在等价意义下, 存在唯一的 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 $\eta \leqslant \tau$ 与 $\rho \leqslant \eta^E$.

(c) 如 ρ 有特征标 χ 使 $F(\chi) = F$, 则 τ 有特征标 $n\chi$.

证　可把 V 看作 F 空间, 令 $v_1, \cdots, v_m$ 为 V 的 E 基, $e_1, \cdots, e_n$ 为 E 的 F 基, 则 $\{e_i v_j\}$ 是 V 的 F 基. 故 $\dim_F V = mn$. 这推出 (a).

由推论 (3.2.9) 知存在 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ (在等价意义下唯一) 使 $\rho \leqslant \eta^E$. 由定理 (3.2.8), 可取 $b \in F[G] \subseteq E[G]$ 使 $\eta(b) = \eta(1)$ 与 $\eta_0(b) = 0$, $\forall \eta_0 \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$, $\eta_0 \nsim \eta$. 因为 $\rho \leqslant \eta^E$, 故由 $\eta(b)$ 是恒等矩阵可推出 $\rho(b)$ 也是恒等矩阵, b 以恒等算子作用于 V. 故 $\tau(b)$ 是恒等矩阵, τ 的每个不可约分量 η_i 满足 $\eta_i(b) \neq 0$. 因此每个 η_i 等价于 η. 这证明了 (b) .

令 $g \in G$. 写 $gv_i = \sum \alpha_{ji} v_j$, $\alpha_{ji} \in E$, 则

$$\chi(g) = \sum \alpha_{ii}. \tag{1}$$

现写 $\alpha_{ij} e_\mu = \sum_\nu \beta_{ij\mu\nu} e_\nu$, $\forall 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n$, $\beta_{ij\mu\nu} \in F$. 设 τ 有特征标 ψ .则

$$g(e_\mu v_i) = \sum_{j,\nu} \beta_{ji\mu\nu} e_\nu v_j,$$

$$\psi(g) = \sum_{i,\mu} \beta_{ii\mu\mu}. \tag{2}$$

我们有
$$\left(\sum_i \alpha_{ii}\right) e_\mu = \sum_{i,\nu} \beta_{ii\mu\nu} e_\nu.$$

由于 $\sum_i \alpha_{ii} = \chi(g) \in F$, 我们得
$$\sum_i \alpha_{ii} = \sum_i \beta_{ii\mu\mu}, \quad \forall \mu, 1 \leqslant \mu \leqslant n. \tag{3}$$

由 (1)—(3) 式推出 (c). □

(4.5.9) 推论 *设 $F \subseteq E$, $[E:F] = n < \infty$. 设 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_E G, \eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$, $\rho \leqslant \eta^E$. 则 $(\deg \eta) | n(\deg \rho)$.*

证 设 τ 是通过把对应于 ρ 的 $E[G]$ 模看作 $F[G]$ 模而得到的 F 表示. 由推论 (3.2.9) 与引理 (4.5.8)(b), η 是 τ 的唯一不可约分量, 故 $\deg \eta | \deg \tau$. 因此结论可从引理 (4.5.8)(a) 得到. □

下面的结果是把定理 (4.5.4) 中的条件 char. $F = p > 0$ 去掉后得到的.

(4.5.10) 推论 *设 ρ 是 G 的特征标为 χ 的绝对不可约 E 表示. 设 $F \subseteq E$ 满足 $F = F(\chi)$. 则存在 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 ρ 是 η^E 的唯一不可约分量. 特别, 存在某正整数 m 使 η 的特征标为 $m\chi$.*

证 如 char. $F = p > 0$, 则由定理 (4.5.4), 存在 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 $\eta^E \sim \rho$. 故结论显然. 现设 char. $F = 0$.

只要证: 存在某正整数 n 使 $n\chi$ 是某 F 表示 τ 的特征标. 一旦这被证明了, 则因对于 G 的分裂域 $L \supseteq E$, $\mathrm{Irr}_L G$ 是 L 线性无关的, 所以 τ^L 的每个不可约分量有特征标 χ, 它们都等价于 ρ^L. 于是可取 η 为 τ 的不可约分量. 结论可从推论 (3.2.9) 得出.

现在让我们来找所要求的 F 表示 τ. 由命题 (3.2.13) 知, 存在 G 在 F 上的分裂域 K 使 $[K:F] = n < \infty$. 由引理 (4.5.3) 知 $\chi \in \mathrm{Irr}_K G$. 取特征标为 χ 的 $K[G]$ 模, 并将其看作 $F[G]$ 模. 令 τ 为对应于该 $F[G]$ 模的 F 表示. 则由引理 (4.5.8)(c) 知 τ 有特征标 $n\chi$. □

在推论 (4.5.10) 中, 对于任何使 $\rho \leqslant \eta_0^E$ 的表示 $\eta_0 \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$, 总有 $\eta_0 \sim \eta$. 于是 ρ 也是 η_0^E 的唯一不可约分量.

(4.5.11) 定理 *设 E 是 G 的分裂域, F 是 E 的子域. 令 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$. 则*

(a) η^E 的不可约分量都以相同的重数出现(记该重数为 m).

(b) 如 char. $E \neq 0$, 则 $m = 1$.

(c) η^E 的不可约分量的特征标 $\{\chi_i\}$ 形成 $\mathrm{Irr}_E G$ 的 F 上伽罗华共轭类 Φ. 故 $\forall \chi_i \in \Phi$, 域 $F(\chi_i)$ 都相同.

(d) 令 $L = F(\chi_i)$. 则 η^L 的不可约分量重数都等于 1.

(e) 如 τ 是 η^L 的不可约分量, 则 τ^E 有唯一的不可约分量, 其重数等于 m.

(f) η^L 与 η^E 都完全可约.

证 设 ρ 是 η^E 的不可约分量. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_E G$ 是 ρ 的特征标. 令 $L = F(\chi)$. τ 为 η^L 的不可约分量使 $\rho \leqslant \tau^E$. 由推论 (4.5.10), ρ 是 τ^E 的唯一不可约分量. 以 m 记其重数. 则 τ 有特征标 $m\chi$. 如 char. $E \neq 0$, 则由定理 (4.5.4) 知 $m = 1$ 及 τ 是绝对不可约的.

令 $\chi_1 = \chi, \chi_2, \cdots, \chi_n$ 为 χ 在 F 上的所有相异的伽罗华共轭. 由引理 (4.5.7)(c) 知 $n = [L:F]$.$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}\ L/F$,

$$\tau^\sigma : g \longmapsto \tau(g)^\sigma, \quad \forall g \in G$$

是 G 的 L 表示. 让 σ 取遍 Gal L/F, 我们可得 n 个不同的表示 τ^σ, 它们的特征标分别是 $m\chi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 因当 char. $F \neq 0$ 时有 $m = 1$, 故在任何情形下, $m\chi_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 总是互异的. 于是当取 σ 为 Gal L/F 中不同元素时, τ^σ 各不相同.

我们断言: 每个 $(\tau^\sigma)^E$ 有唯一的不可约分量, 其重数等于 m. 这因为: 当 char. $E = 0$ 时, 该断言可从特征标理论推出. 当 char. $E = p > 0$ 时, τ^σ 是绝对不可约的, 断言显然成立.

我们再断言: $n = [L:F]$ 个表示 $\{\tau^\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}\ L/F\}$ 恰形成 η^L 的相异不可约分量的集合, 其中每个不可约分量的重数都等于 1. 因为当 $\lambda, \mu \in$Gal $L/F, \lambda \neq \mu$ 时, $(\tau^\lambda)^E$ 与 $(\tau^\mu)^E$ 的不可约分量互不等价. 故只要该断言成立, 结论 (a)—(e) 便都成立了.

现在来证明上述断言. 因为 $\tau \leqslant \eta^L$, 且

$$(\eta^L)^\sigma = \eta^L, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}\ L/F,$$

这推出: $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}\ L/F$, τ^σ 是 η^L 的分量. 于是由 $n = |\mathrm{Gal}\ L/F|$ 知 $n(\deg \tau) \leqslant \deg \eta$. 据推论 (4.5.9),

$$(\deg \eta) | n(\deg \tau).$$

故

$$n(\deg \tau) = \deg \eta.$$

因此 τ^σ 是 η^L 的仅有不可约分量, 其重数等于 1, 如所断言.

剩下要证: η^L 与 η^E 都完全可约. 当 char. $E = 0$ 时, 结论可从定理 (3.1.1) 推出. 现设 char. $E = p > 0$. 不妨设 τ 是 η^L 的不可约子表示. 因 $(\eta^L)^\sigma = \eta^L$, 故 $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}\ L/F$, τ^σ 是 η^L 的不可约子表示. 令 V 为对应于 η^L 的 $L[G]$ 模. 令 W 为 V 的所有不可约子模的和. 由定理 (1.4.5), W 是完全可约的. 于是只要证 $W = V$.

因为 η^L 的每个不可约分量是 η^L 的子表示, V 的每个合成因子都作为 W 的合成因子而出现. 由于 V 的合成因子的重数都等于 1, 故 V/W 必须是平凡模 (即零模), 即 $V=W$, η^L 是完全可约的. 由于 τ^E 不可约, 故可类似地证明 η^E 的完全可约性. □

现在我们要导出一些推论. 第一个推论推广了定理 (4.5.4).

(4.5.12) 推论 *令 F 为任意域. 则 $\mathrm{Irr}_F G$ 中元素都非零, 互异及 F 线性无关.*

证 设 $E\supseteq F$ 是 G 的分裂域. 据定理 (4.5.11), $\mathrm{Irr}_F G$ 的元素是 $\mathrm{Irr}_E G$ 的某子集元素和的非零倍数, 且 $\mathrm{Irr}_F G$ 的不同元素所对应的 $\mathrm{Irr}_E G$ 的子集的交是空集. 故结论可从引理 (4.5.2) 推出. □

设 $\mathrm{Irr}_F G=\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$ 与 $\chi\in \mathrm{ch}_F^+(G)$. 则由推论 (4.5.12) 知: χ 可唯一地表成 $\mathrm{Irr}_F G$ 中元素的整线性组合. 如 $\chi=m_1\chi_1+\cdots+m_s\chi_s$ 与 $\chi'=m_1'\chi_1+\cdots+m_s'\chi_s$ 满足 $m_i\geqslant m_i'\geqslant 0,\forall i$, 则记 $\chi'\leqslant\chi$ (比较 (2.4.3) 中关于群表示的相应记号). 显然, 如 $\rho,\rho'\in R_F(G)^+$ 分别有特征标 χ,χ', 则 $\chi'\leqslant\chi$ 当且仅当 $\rho'\leqslant\rho$. 于是, 当 $\chi'\in\mathrm{Irr}_F G$ 与 $\chi'\leqslant\chi$ 时, 我们也称 χ' 为 χ 的不可约分量.

(4.5.13) 推论 *设 $F\subseteq E$ 与 char. $F=p>0$. 设 $\rho\in\overline{\mathrm{Irr}}_E G$ 的特征标为 χ. 设 $\eta\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 满足 $\rho\leqslant\eta^E$. 则*

$$\deg\eta=[F(\chi):F]\deg\rho.$$

特别, 如 $F(\chi)=F$, 则 $\rho\sim\eta^E$.

证 设 $L\supseteq E$ 是 G 的分裂域, $\zeta\in\mathrm{Irr}_L G$ 是 ρ^L 的一个不可约分量的特征标. 令 Φ 与 Ψ 分别为在 E 上与在 F 上含 ζ 的伽罗华共轭类. 因为 char. $E=p>0$, 由定理 (4.5.11), 只要证:

$$|\Psi|=[F(\chi):F]|\Phi|.$$

由引理 (4.5.7)(b), 有 $\Phi\subseteq\Psi$. 于是 $\chi=\sum\limits_{\lambda\in\Phi}\lambda$ 在 $F(\zeta)$ 中取值. 故 $F(\chi)\subseteq F(\zeta)$. 因为据引理 (4.5.7)(b), 有

$$|\Psi|=[F(\zeta):F].$$

必须证明:

$$|\Phi|=[F(\zeta):F(\chi)].$$

令 $H=\mathrm{Gal}\,F(\zeta)/F(\chi)$. 如 $\sigma\in H$, 则

$$\sum_{\lambda\in\Phi}\lambda=\chi=\chi^\sigma=\sum_{\lambda\in\Phi}\lambda^\sigma.$$

由 $\mathrm{Irr}_L G$ 的线性无关性与引理 (4.5.6) 知 H 置换 Φ. 因为 H 中只有恒等元才固定 ζ, 这推出

$$|\Phi| \geqslant |H| = [F(\zeta) : F(\chi)].$$

但是, $F(\chi) \subseteq E \bigcap F(\zeta)$, 故

$$|\Phi| = [E(\zeta) : E] = [F(\zeta) : E \bigcap F(\zeta)] \leqslant [F(\zeta) : F(\chi)].$$

因此 $|\Phi| = [F(\zeta) : F(\chi)]$. 即

$$|\Psi| = [F(\chi) : F]|\Phi|.$$

□

由 §3.2 知: 当 F 是群 G 的分裂域时, 有等式

$$F[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(F),$$

这里 s 等于 G 的互异的不可约 F 表示的个数. 设 ρ 是从 $F[G]$ 到 $\bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(F)$ 的同构映射, ρ_i 是从 $F[G]$ 到 $M_{n_i}(F)$ 的映射使得 $\rho = \sum_{i=1}^{s} \rho_i$. 现要考虑 ρ 的逆映射.

(4.5.14) 定理 (傅里叶逆变换) 设 $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant s} \in \bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(F)$, 设 $u = \sum_{x \in G} u(x)x \in F[G], u(x) \in F$, 满足 $\rho_i(u) = u_i \ \forall i$. 则

$$u(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{s} n_i \mathrm{tr}.(\rho_i(x^{-1})u_i), \quad \forall x \in G. \tag{4}$$

证 由于 ρ 是线性映射, 只要对于任何 $u = y \in G$ 证明等式 (4) 就行了. 我们有

$$y(x) = \delta_{xy}, \quad \mathrm{tr}.(\rho_i(x^{-1})u_i) = \chi_i(x^{-1}y),$$

这里 χ_i 是 G 的表示 ρ_i 的特征标. 于是, 只要证明等式

$$\delta_{xy} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{s} n_i \chi_i(x^{-1}y). \tag{5}$$

而这可从定理 (3.1.6), 定理 (3.1.8) 和例 (4.1.2)(b) 推出. □

(4.5.15) 对于任意域 F 和群 G, 记 $\mathrm{ch}_F(G) = \{\xi - \zeta | \xi, \zeta \in \mathrm{ch}_F^+(G)\}$. 则 $\mathrm{ch}_F(G)$ 是 G 上 F 值类函数环 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的子环. 对于任何 $W = W_1 - W_2 \in R_F(G)$ (其中 $W_1, W_2 \in R_F(G)^+$), 分别以 χ_1, χ_2 记 W_1, W_2 的特征标. 由推论 (4.5.12) 知: $\chi_1 - \chi_2 \in \mathrm{ch}_F(G)$ 由 W 所唯一确定, 而与 W 被写成 $\mathrm{ch}_F^+(G)$ 中两个元素之差的具体表达式无关. 称 $\chi_1 - \chi_2$ 为 G 的对应于 W 的**广义特征标** (或简称 G 的**广义特征标**).

习 题

1. 设 $g \in G$. 则 $g \sim g^{-1} \iff \forall \chi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G),\ \chi(g) \in \mathbb{R}$.

2. 设 $n = |G|$, $g \in G$. 则 $\forall m$, $(m,n) = 1$, 有 $g \sim g^m \iff \forall \chi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$, 有 $\chi(g) \in \mathbb{Q}$.

提示 令 ε 为 $\mathbb{C}$ 的 n 次单位原根. 给定 m, $(m,n) = 1$, 证明存在 $\sigma \in \mathrm{Gal}\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}$ 使 $\chi(g^m) = \chi(g)^\sigma$, $\forall g \in G, \chi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$. 反之, $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}$, 必存在整数 $m, (m,n) = 1$, 使 $\chi(g^m) = \chi(g)^\sigma$.

3. 设 g 是 G 的阶数等于 l 的换位子. 设 $m \in \mathbb{Z}$ 满足 $(m,l) = 1$. 证明 g^m 也是 G 的换位子.

提示 见第 2 题的提示.

4. 设 F 是 E 的子域, V 是不可约 $E[G]$ 模, 其特征标为 χ. 设 $E = F(\chi)$. 证明: V 作为 $F[G]$ 模是不可约的.

5. 对于 $\chi \in \mathrm{ch}(G)$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 定义 $\chi^{(k)}$ 为 G 上函数使得 $\chi^{(k)}(g) = \chi(g^k)$, $\forall g \in G$. 证明: $\chi^{(k)} \in \mathrm{ch}(G)$, $\forall \chi \in \mathrm{ch}(G)$.

6. 设 G 是对称群 S_n 的子群, ω 是 G 在集合 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上的自然作用所引起的置换表示, π 是 ω 的特征标, 即 $\pi(g)$ 是 $g \in G$ 在 Ω 里的固定点个数. 取定 $k \in \mathbb{N}$. 定义映射 $\delta_k : G \to \mathbb{Z}$ 如下: $\delta_k(g)$ 为把 $g \in G$ 写成不相交循环置换之积时所出现的长度为 k 的循环置换因子的个数. 记 $\theta_k = k\delta_k$. 证明:

(a) $\pi^{(k)} = \sum_{d|k} \theta_d$.

(b) $\theta_k = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \pi^{(d)}$, 这里 μ 是 $\mathbb{N}$ 上的 Möbius 函数, 使得 $\mu(1) = 1; \mu(m) = 0$ 如 m 含平方因子; $\mu(m) = (-1)^r$ 如 m 是 r 个两两互异的素数因子的乘积.

(c) $\theta_k \in \mathrm{ch}(G)$.

第五章　诱导表示的基本性质

设 H 是 G 的子群与 $\rho \in R_F(H)^+$. 我们在 (2.3.6) 中已定义过诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G \rho$. 自本章起, 我们要比较详细地讨论群的诱导表示的各种性质. 研究群的诱导表示有两个主要目的: 首先是为了建立群 G 与其子群的表示之间的联系, 从而把群论与表示论的研究更好地结合起来, 其次是为了提供表示的递归构造法.

本章先讨论诱导表示的存在性与唯一性问题. 接着研究诱导表示的某些基本性质, 其中包括著名的 Frobenius 互反律, Mackey 的子群定理与张量积定理. 由此导出关于诱导表示不可约性的一个判则及其推论. 然后, 运用前面所学的特征标理论来研究某族特殊群, 即 Frobenius 群的结构与特征标. 最后, 作为本章前三节内容的应用, 我们着重研究了群的置换表示及 Burnside 环.

§5.1　诱导表示的几种刻画

我们在 (2.3.6) 里定义了 G 的 H 诱导表示. 现在要问: 给定 H 的任何表示 (σ, W), 是否总存在 G 的表示 (ρ, V) 使得 (ρ, V) 是 (σ, W) 的诱导表示? 如果存在的话, 它是否由 (σ, W) 所唯一确定? 现在让我们来回答这两个问题.

记 $A = F[G]$ 与 $B = F[H]$. 设 (σ, W) 是 H 的表示. 由于 B 是 A 的子代数, A 有 (A, B) 双模结构. 于是张量积 $A \otimes_B W$ 是左 A 模:

$$a(b \otimes w) = ab \otimes w, \quad \forall a, b \in A, w \in W.$$

根据 G 的表示与左 A 模的对应关系知 $A \otimes_B W$ 提供了 G 的一个表示.

设 $R = \{s_1 = 1, s_2, \cdots, s_r\}$ 是 G 的 H 左陪集代表系, 则 G 的元素可唯一地表为形状 $s_i h$, $h \in H$. 因 A 是以 R 为基的自由右 B 模, 这推出 $A \otimes_B W$ 的每个元素可被唯一地写成形状

$$s_1 \otimes w^{(1)} + \cdots + s_r \otimes w^{(r)}, \ w^{(i)} \in W,$$

于是如果 $C = (w_1, \cdots, w_n)$ 是 W 的 F 基, 则

$$D = (s_1 \otimes w_1, \cdots, s_1 \otimes w_n, \cdots, s_r \otimes w_1, \cdots, s_r \otimes w_n)$$

是 $A \otimes_B W$ 的 F 基. 特别, $\dim_F(A \otimes_B W) = nr$.

我们有

$$A \otimes W = \bigoplus_{i=1}^{r} s_i B \otimes W = \bigoplus_{i=1}^{r} s_i \otimes W = \bigoplus_{i=1}^{r} s_i (1 \otimes W),$$

这里 $s_1 \otimes W = 1 \otimes W$ 是 $A \otimes W$ 的 B 子模 (注: 为简化符号, 我们把 "$\otimes_B$" 记作 "$\otimes$"). 映射

$$w \mapsto 1 \otimes w, \quad \forall w \in W$$

是从 W 到 $A \otimes W$ 内的 B 模单同态, 其像为 $1 \otimes W$, 即存在 B 模同构

$$1 \otimes W \cong W.$$

于是 $A \otimes_B W$ 是 W 的诱导表示, 即 $W^G \sim A \otimes_B W$. 称 $A \otimes_B W$ 为 W 的诱导模. 这证明了 (σ, W) 的诱导表示 (σ^G, W^G) 的存在性. 诱导表示在等价意义下的唯一性可从其定义推出.

诱导表示也可用范畴论的语言来刻画.

考虑两个范畴 ${}_A\mathscr{M}$ 与 ${}_B\mathscr{M}$, 存在函子 $\mathrm{Res}: {}_A\mathscr{M} \to {}_B\mathscr{M}$ 使

$$\mathrm{Res}(M) = {}_B M, \quad \forall M \in {}_A\mathscr{M}.$$

称 Res 为**纯量限制函子**. 给定 $N \in {}_B\mathscr{M}$, 定义映射 $u: N \to A \otimes_B N$ 使

$$u(x) = 1 \otimes x, \quad \forall x \in N.$$

则 u 是 B 模同态.

(5.1.1) 命题 设 $M \in {}_A\mathscr{M}$ 与 $N \in {}_B\mathscr{M}$. 设 η 是从 N 到 $\mathrm{Res}(M)$ 内的 B 模同态. 则存在从 $A \otimes_B N$ 到 M 内的唯一 A 模同态 $\widetilde{\eta}$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\ u\ } & \mathrm{Res}(A \otimes_B N) \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle \mathrm{Res}(\widetilde{\eta})} & \\ \mathrm{Res}(M) & & \end{array} \tag{1}$$

证 考虑映射:

$$A \times N \to M,$$
$$(a, y) \mapsto a(\eta y).$$

显然, 该映射关于 a 与 y 是加性的. 如 $b \in B$, 则

$$(ab)(\eta y) = a(b(\eta y)) = a(\eta(by)).$$

于是 $(a, y) \mapsto a(\eta y)$ 定义了从 $A \times N$ 到 M 内的 B 平衡映射. 因此我们有从 $A \otimes_B N$ 到 M 内的 A 模同态 $\widetilde{\eta}$ 使

$$\widetilde{\eta}(a \otimes y) = a(\eta y).$$

如 $y \in N$, 则 $\mathrm{Res}(\widetilde{\eta})(uy) = \mathrm{Res}\ (\widetilde{\eta})(1 \otimes y) = 1(\eta y) = \eta y$. 这证明了图 (1) 的交换性.

令 η' 为从 $A \otimes {}_B N$ 到 M 内的另一个 A 模同态使

$$\eta y = \eta' u y = \eta'(1 \otimes y).$$

则 $\eta'(a \otimes y) = \eta'(a(1 \otimes y)) = a\eta'(1 \otimes y) = a(\eta y)$. 因此 $\eta' = \widetilde{\eta}$. □

由上述命题可知: $\forall N \in {}_B\mathscr{M}$, 二元组 $(A \otimes_B N, u)$ 是从 N 到函子 Res 的一个普遍性. 定义 $\mathrm{Ind} : {}_B\mathscr{M} \to {}_A\mathscr{M}$ 使

$$\mathrm{Ind}(N) = A \otimes_B N, \quad \forall N \in {}_B\mathscr{M}$$

与 $\mathrm{Ind}(\eta) = 1 \otimes \eta$, $\forall \eta \in \mathrm{Hom}_B(L, M)$, $L, M \in {}_B\mathscr{M}$. 易证 Ind 是从范畴 ${}_B\mathscr{M}$ 到 ${}_A\mathscr{M}$ 内的函子. 称 Ind 为**诱导函子**. 由命题 (5.1.1) 知: Ind 是 Res 的左伴随 (见 §1.11).

诱导表示的范畴论刻画也证实了诱导表示的唯一性.

为了计算诱导表示 (σ^G, W^G) 的特征标. 我们要给出相应的矩阵表示形式. 令 $g \in G$, 有

$$gs_i \in s_j H, \quad \forall i, 1 \leqslant i \leqslant r,$$

这里 $s_j H$ 是由 g 与 i 所确定的 H 左陪集. 于是存在唯一的元素 $h \in H$ 使

$$gs_i = s_j h.$$

因此 $g(s_i \otimes W) = s_j \otimes W$. g 置换 W^G 的直和项 $\{s_i \otimes W\}$. 而 g 在 $s_i \otimes W$ 上的作用由下式给出:

$$g(s_i \otimes w) = s_j h \otimes w = s_j \otimes hw, \quad \forall w \in W.$$

设 $\sigma_C(h) = (\alpha_{ij}(h))$, $\forall h \in H$. 令 $gs_i = s_j h$ 如上. 我们有:

$$g(s_i \otimes w_k) = s_j \otimes hw_k = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tk}(h)(s_j \otimes w_t),\ \forall 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2}$$

现在要把上式化为更实用的形式. 让我们扩充矩阵系数函数 $\{\alpha_{ij}\}$ 为映射 $\dot{\alpha}_{ij}: G \to F$, 这里

$$\dot{\alpha}_{ij}(g) = \begin{cases} \alpha_{ij}(g), & \text{如 } g \in H, \\ 0, & \text{如 } g \notin H. \end{cases}$$

于是 (2) 式可改写为

$$g(s_i \otimes w_k) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tk}(h) s_j \otimes w_t = \sum_{j=1}^{r} \sum_{t=1}^{n} \dot{\alpha}_{tk}(s_j^{-1} g s_i)(s_j \otimes w_t). \tag{3}$$

让我们扩充 σ_C 为 $\dot{\sigma}_C(g) = (\dot{\alpha}_{ij}(g))$, $\forall g \in G$. 则我们有

$$(\sigma^G)_D(g) = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_C(s_1^{-1} g s_1) & \cdots & \dot{\sigma}_C(s_1^{-1} g s_r) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\sigma}_C(s_r^{-1} g s_1) & \cdots & \dot{\sigma}_C(s_r^{-1} g s_r) \end{pmatrix}$$

令 χ 为 σ 的特征标, 则 σ^G 的特征标 χ^G 由下式给出:

$$\chi^G(g) = \sum_{i=1}^{r} \dot{\chi}(s_i^{-1} g s_i), \tag{4}$$

这里

$$\dot{\chi}(g) = \begin{cases} \chi(g), & \text{如 } g \in H, \\ 0, & \text{如 } g \notin H. \end{cases}$$

如 char.$F \nmid |H|$, 则 (4) 式被改写为如下更方便的形式:

$$\chi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\chi}(x^{-1} g x). \tag{5}$$

(5) 式的优点在于它不涉及陪集代表元的选取. 由 (5) 式易推出

$$\deg \chi^G = \chi^G(1) = [G : H]\chi(1).$$

(5.1.2) 例 (a) 设 $(1_H, V)$ 是 H 的单位表示. 令 $0 \neq v \in V$. 则 $V = Fv$, 且 $hv = v$, $\forall h \in H$. 元素 $g \in G$ 在由表示 1_H^G 提供的 $F[G]$ 模 V_H^G 的 F 子空间 $F(s_i \otimes v)$ 上的作用为

$$g(s_i \otimes v) = s_j \otimes v,$$

这里 $gs_i \in s_jH$. 此式说明: 在上述给出的 G 的作用下, V_H^G 的 F 子空间的 G 集 $\{F(s_i \otimes v)\}$ 同构于在 G 的左平移作用下 G 的 H 左陪集的 G 集 $G/H = \{s_iH\}$. 于是诱导表示 1_H^G 等价于 G 的如下定义的置换表示: 该表示空间的 F 基为 $\{v_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$, 这里 $n = |G/H|$. 如果 $\forall g \in G, 1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $gs_iH = s_jH$, 则 $gv_i := v_j$. 特别, 当 $H \lhd G$ 时, 1_H^G 是商群 G/H 的正则表示到 G 的提升. 这推出: 当 $H = \{1\}$ 时, 1_H^G 是 G 的正则表示.

(b) 设 $A = F[G]$ 与 $B = F[H]$. 容易验证: 映射 $a \otimes b \mapsto ab$ (这里 $a \in A, b \in B$) 是从 $A \otimes_B B$ 到 A 上的左 A 模同构, 这推出 G 的正则表示等价于 H 的正则表示的诱导表示.

习　题

本习题中设 F 是 G 及其子群的分裂域.

1. (Mackey) 设 $H \leqslant G$, U 为 $F[H]$ 模. 定义

$$V := \{f : G \to U | f(hg) = hf(g), \forall h \in H, g \in G\}.$$

则 V 是 F 空间. 定义 G 在 V 上的作用为

$$(gf)(x) = f(xg), \quad \forall f \in V, g, x \in G.$$

证明: 存在 $F[G]$ 模同构 $V \cong U^G$.

2. 设 n 是 G 的指数, ε 是 $\mathbb{C}$ 中 n 次单位原根, 设 $F \subseteq \mathbb{C}, H \leqslant G$ 与 $\mathscr{I} \in \mathrm{ch}_F^+(H)$. 证明: $\mathscr{I}^G \in \mathrm{ch}_F^+(G)$. 特别, 当 $\mathscr{I}$ 是线性特征标时, $\mathscr{I}^G \in \mathrm{ch}_{\mathbb{Q}(\varepsilon)}^+(G)$.

3. 找出 S_4 与 A_4 的特征标表.

提示　找出所有正规真子群. 研究这些正规子群的诱导特征标及商群的特征标.

4. 设 Ω 是 G 集, F 是 G 的分裂域, $\mathrm{char}.F = 0$. 令 θ 为 G 在 Ω 上的置换表示的特征标. 称 θ 为由 G 集 Ω 决定的**置换特征标**.

(a) 证明: $\forall x \in G$, $\theta(x) = |\{\omega \in \Omega | x\omega = \omega\}|$.

(b) 证明: $(\theta, 1_G)$ 等于 Ω 中 G 轨道的个数. 特别 Ω 是可迁 G 集当且仅当 $(\theta, 1_G) = 1$.

(c) 若 Ω 与 Ω' 是可迁 G 集, 其置换特征标为 θ 与 θ'. 证明 $\theta\theta'$ 为 G 集 $\Omega \times \Omega'$ 的特征标 (G 对角地作用在 $\Omega \times \Omega'$ 上:

$$g \cdot (x, x') = (gx, gx'), \quad \forall x \in \Omega,\ x' \in \Omega' \quad 与 \quad g \in G.)$$

于是 $(\theta, \theta') = (\theta\theta', 1_G)$ 等于 $\Omega \times \Omega'$ 中 G 轨道的个数. 以此来证明: 如 $X, Y \leqslant G$, 则

$$(1_X^G, 1_Y^G) \text{ 等于 } G \text{ 的 } (X, Y) \text{ 双陪集个数 } |X \setminus G / Y|.$$

5. 沿用上题的记号, 称 G 集 Ω 为**双可迁的**, 如果 $\forall (u, v), (u', v') \in \Omega \times \Omega, u \neq v, u' \neq v'$, 存在 $g \in G$ 使 $gu = u'$ 与 $gv = v'$.

(a) 证明: Ω 是双可迁的 $\Longleftrightarrow (\theta,\theta)=2 \Longleftrightarrow |H\setminus G/H|=2$, 这里 θ 是置换特征标, $H=\mathrm{Stab}_G(\omega), \omega$ 是 Ω 中某元素.

(b) 证明: 如果 Ω 是双可迁的, 则 $\theta=1_G+\zeta$, 这里 ζ 是 $\mathrm{Irr}_F G$ 中某非单位特征标.

6. 设 M 是以 $B=(m_1,\cdots,m_n)$ 为基的 F 空间. 设 T 是 G 在 M 上的置换表示, 它保持 B 不变, 且 B 为 $T(G)$ 可迁的. 设 $H=\mathrm{Stab}_G(m_1)$. 证明: 存在 H 的一次表示 U 使 $T=U^G$. 请问 G 的任何置换表示是否都是诱导表示?

7. 令 ζ 为 G 的子群 H 的特征标, 则

$$\mathrm{Ker}\zeta^G=\bigcap_{x\in G}{}^x(\mathrm{Ker}\zeta),$$

这里 ${}^xT:=xTx^{-1}$.

8. 设 $H\leqslant G$. 群 G 作用在左陪集集合 G/H 上: $g\cdot xH=gxH$, $\forall g,\ x\in G$. 令 χ_ρ 为相应置换表示 ρ 的特征标.

(a) 证明: $\chi_\rho(g)=|\{xH\in G/H|g\in xHx^{-1}\}|$.

(b) 当 $H\lhd G$ 时, 证明: $\chi_\rho(g)=\begin{cases}0, & 如果\ g\notin H,\\ |G/H|, & 如果\ g\in H.\end{cases}$

(c) 设 $G=S_4$ 和 $H=S_3$ (将 H 看作 G 里所有保持 4 不动的置换组成的子群). 试确定特征标 χ_ρ.

§5.2 诱导表示的基本性质

现在我们来研究诱导模的某些性质.

(5.2.1) 命题 设 $H\leqslant K\leqslant G$. 令 $(\sigma,U)\in R_F(H)^+$ 与 $(\rho,V)\in R_F(G)^+$. 令 ρ_H 为 ρ 在 H 上的限制. 则

(a) σ^G 与 $(\sigma^K)^G$ 是 G 的等价表示.

(b) 如 W 是 H 在 U 上的子表示, 则 W^G 是 G 在 U^G 上的子表示. 进而, 如 $U=W_1\oplus W_2$ 是 H 的子表示的直和分解, 则 $U^G=W_1^G\oplus W_2^G$.

(c) $\sigma^G\otimes\rho$ 与 $(\sigma\otimes\rho_H)^G$ 是 G 的等价表示.

证 (a) 记 $A=F[G], B=F[H]$ 与 $C=F[K]$. 则 $\sigma^K,(\sigma^K)^G$ 与 σ^G 的表示空间分别是 $C\otimes_B U, A\otimes_C(C\otimes_B U)$ 与 $A\otimes_B U$. 据 §1.9, 我们有左 A 模同构

$$A\otimes_C(C\otimes_B U)\cong(A\otimes_C C)\otimes_B U,$$
$$A\otimes_C C\cong A.$$

因此存在左 A 模同构

$$A\otimes_C(C\otimes_B U)\cong A\otimes_B U.$$

这证明了 (a).

(b) W 是 U 的左 B 子模. 因为 A 是自由右 B 模, 所以 $W^G = A\otimes_B W$ 是 $U^G = A\otimes_B U$ 的 A 子模, 即 W^G 是 G 在 U^G 上的子表示. 后半部分结论可用同法推出.

(c) $\sigma^G\otimes\rho$ 与 $(\sigma\otimes\rho_H)^G$ 的表示空间分别是 $(A\otimes_B U)\otimes_F V$ 与 $A\otimes_B (U\otimes_F V)$. $\forall g\in G, a\in A, x\in U$ 与 $y\in V$, 我们有

$$g((a\otimes_B x)\otimes_F y) = (ga\otimes_B x)\otimes_F gy,$$
$$g(a\otimes_B (x\otimes_F y)) = ga\otimes_B (x\otimes_F y).$$

因此映射 $(a\otimes_B x)\otimes_F y\mapsto a\otimes_B(x\otimes_F y)$ 是从 $(A\otimes_B U)\otimes_F V$ 到 $A\otimes_B(U\otimes_F V)$ 上的 F 线性同构, 但非 A 模同构. 我们要定义从 $A\otimes_B(U\otimes_F V)$ 到 $(A\otimes_B U)\otimes_F V$ 上的 A 模同构 φ, 使

$$\varphi(1\otimes_B (x\otimes_F y)) = (1\otimes_B x)\otimes_F y.$$

如这样的 A 模同构 φ 存在, 则有

$$\varphi(g\otimes_B (x\otimes_F y)) = (g\otimes_B x)\otimes_F gy.$$

给定 $g\in G$, 考虑从 $U\times V$ 到 $(A\otimes_B U)\otimes_F V$ 内的映射

$$(x,y)\mapsto (g\otimes_B x)\otimes_F gy.$$

由于它是 F 平衡映射, 故存在 F 线性映射

$$\tau_g : U\otimes_F V\to (A\otimes_B U)\otimes_F V,$$

使 $\tau_g(x\otimes_F y) = (g\otimes_B x)\otimes_F gy, \forall x\in U, y\in V$.
因 G 是 A 的 F 基, 所以 $\forall a = \sum\limits_g \alpha_g\, g\in A,\ \alpha_g\in F$,

$$\tau_a = \sum \alpha_g\tau_g : U\otimes_F V\to (A\otimes_B U)\otimes_F V$$

是 F 线性同态. 我们有

$$\tau_a(x\otimes_F y) = \sum_g \alpha_g(g\otimes_B x)\otimes_F gy.$$

由于 $(a,\sum x_i\otimes_F y_i)\mapsto \tau_a(\sum x_i\otimes_F y_i)$ 是从 $A\times(U\otimes_F V)$ 到 $(A\otimes_B U)\otimes_F V$ 内的 F 平衡映射. 又由于 $\forall h\in H$,

$$\begin{aligned}&\tau_{gh}(x\otimes_F y) - \tau_g(hx\otimes_F hy)\\ =\ &(gh\otimes_B x)\otimes_F ghy - (g\otimes_B hx)\otimes_F ghy\\ =\ &(g\otimes_B hx)\otimes_F ghy - (g\otimes_B hx)\otimes_F ghy = 0.\end{aligned}$$

我们有 F 线性同态 $\varphi: A \otimes_B (U \otimes_F V) \to (A \otimes_B U) \otimes_F V$ 使

$$\varphi(g \otimes_B (x \otimes_F y)) = (g \otimes_B x) \otimes_F gy.$$

$\forall g' \in G$, 我们有

$$g'(g \otimes_B (x \otimes_F y)) = g'g \otimes_B (x \otimes_F y),$$
$$g'((g \otimes_B x) \otimes_F gy) = (g'g \otimes_B x) \otimes_F g'gy.$$

这推出 φ 是 A 模同态. φ 显然是满射. 又因为

$$\dim_F(A \otimes_B (U \otimes_F V)) = \dim_F((A \otimes_B U) \otimes_F V).$$

所以 φ 是 A 模同构. (c) 得证. □

用特征标的语言来复述以上命题即得:

(5.2.2) 推论 设 $H \leqslant K \leqslant G$. 令 $\chi \in \mathrm{ch}_F^+(H)$ 与 $\psi \in \mathrm{ch}_F^+(G)$. 令 ψ_H 为 ψ 在 H 上的限制, 则

(a) $\chi^G = (\chi^K)^G$.

(b) 如 $\varphi \in \mathrm{ch}_F^+(H)$ 使 $\varphi \leqslant \chi$, 则 $\varphi^G \leqslant \chi^G$. 进而, 如 $\chi = \varphi_1 + \varphi_2$ 是 H 的特征标分解, 则 $\chi^G = \varphi_1^G + \varphi_2^G$.

(c) $\chi^G \psi = (\chi \psi_H)^G$.

下面要证的 Frobenius 互反律揭示了诱导表示与限制表示之间的重要联系.

(5.2.3) 定理 (关于模的 Frobenius 互反律) 设 $H \leqslant G$. 记 $A = F[G]$ 与 $B = F[H]$. 设 L 是左 B 模及 M 是左 A 模. 则存在 F 线性同构

$$\mathrm{Hom}_B(L, {}_BM) \cong \mathrm{Hom}_A(L^G, M).$$

证 设 A' 与 B' 是二个 F 代数. 据 §1.9, 对于模 ${}_{B'}L'$, ${}_{A'}M'_{B'}$ 与 ${}_{A'}N'$, 存在 F 线性同构

$$\mathrm{Hom}_{B'}(L', \mathrm{Hom}_{A'}(M', N')) \cong \mathrm{Hom}_{A'}(M' \otimes_{B'} L', N').$$

现置 $A' = A$, $B' = B$, $L' = L$, $M' = A$ 与 $N' = M$. 则存在 F 线性同构

$$\tau: \mathrm{Hom}_B(L, \mathrm{Hom}_A(A, M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(L^G, M)$$

使 $(\tau f)(m \otimes l) = f_l(m), \forall m \in A, l \in L$, 这里 $f_l := f(l) \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$.

剩下要验证左 B 模 $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ 同构于 ${}_BM$. 显然, 映射

$$\pi: \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M,$$
$$f \mapsto f(1)$$

是 F 线性同构. 定义 B 在 $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ 上的作用如下:

$$(bf)(a) := f(ab), \quad \forall a \in A,\ b \in B.$$

则我们有

$$\pi(bf) = (bf)(1) = f(b) = b(f(1)) = b\pi(f), \quad \forall b \in B, f \in \mathrm{Hom}_A(A,M).$$

这说明存在 B 模同构

$$\mathrm{Hom}_A(A,M) \cong {}_BM. \qquad \square$$

设 $F \subseteq \mathbb{C}$ 是群 G 及其子群 H 的分裂域. 仍记 $A = F[G]$ 与 $B = F[H]$. 设左 A 模 M 的特征标是 μ, 左 B 模 L 的特征标是 λ, 则有

$$\dim_F(\mathrm{Hom}_B(L, {}_BM)) = (\lambda, \mu_H)_H,$$
$$\dim_F(\mathrm{Hom}_A(L^G, M)) = (\lambda^G, \mu)_G,$$

这里 λ, μ 分别被看作是 H, G 的特征标. 故此时关于 $F[G]$ 模的 Frobenius 互反律可用特征标的语言来表述:

$$(\lambda, \mu_H)_H = (\lambda^G, \mu)_G. \tag{1}$$

值得注意的是上式可用纯粹的特征标理论来证明.

(5.2.4) 定理 (关于类函数的 Frobenius 互反律) 设 $F \subseteq \mathbb{C}$ 和 $H \leqslant G$. 令 $\lambda \in \mathrm{cf}(H)$ 与 $\mu \in \mathrm{cf}(G)$. 定义 $\lambda^G : G \to F$ 如下:

$$\lambda^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\lambda}(x^{-1}gx),$$

这里

$$\dot{\lambda}(g) := \begin{cases} \lambda(g), & \text{如 } g \in H, \\ 0, & \text{如 } g \notin H. \end{cases}$$

则 $\lambda^G \in \mathrm{cf}(G)$, 我们有

$$(\lambda^G, \mu)_G = (\lambda, \mu_H)_H,$$

这里 μ_H 是 μ 在 H 上的限制.

证 包含关系 $\lambda^G \in \mathrm{cf}(G)$ 可直接由定义推出. 我们有

$$\begin{aligned}
(\lambda^G, \mu)_G &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\dot{\lambda}(y^{-1}xy)\overline{\mu(x)} \\
&= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\dot{\lambda}(y^{-1}xy)\overline{\mu(y^{-1}xy)} \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{z\in G}\dot{\lambda}(z)\overline{\mu(z)} \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{z\in H}\lambda(z)\overline{\mu(z)} \\
&= (\lambda, \mu_H)_H,
\end{aligned}$$

这里用到如下两个事实: (a) μ 是 G 上类函数. (b) 对于固定的 $z \in G$, 关于 $(x, y) \in G \times G$ 的方程 $y^{-1}xy = z$ 的解的个数等于 $|G|$. □

关于类函数的 Frobenius 互反定理 (5.2.4) 可帮助我们计算群的不可约 F 特征标.

(5.2.5) 例 设 $D_m = \langle r, s | r^m = s^2 = (rs)^2 = 1\rangle$ 是阶数等于 $2m$ 的二面体群. 我们要计算 D_m 的所有不可约 F 特征标. 设 $\lambda : \langle r\rangle \to F^*$ 是 $\langle r\rangle$ 的不可约 (线性) 特征标. 令 ε 为 m 次单位原根. 则存在某正整数 i 使 $\lambda(r) = \varepsilon^i$. 由 §5.1 的 (4) 式得

$$\lambda^G(x) = \dot{\lambda}(x) + \dot{\lambda}(s^{-1}xs), \quad \forall x \in \langle r\rangle.$$

由于 $s^{-1}xs = x^{-1}$, 我们有

$$(\lambda^G)_{\langle r\rangle} = \lambda + \overline{\lambda}.$$

由 (1) 式得

$$(\lambda^G, \lambda^G)_G = (\lambda, (\lambda^G)_{\langle r\rangle})_{\langle r\rangle} = (\lambda, \lambda + \overline{\lambda})_{\langle r\rangle}.$$

据 §4.2 知

$$\lambda^G\text{不可约} \Longleftrightarrow (\lambda^G, \lambda^G) = 1 \Longleftrightarrow \lambda \neq \overline{\lambda}.$$

进而, 如群同态 $\lambda, \mu : \langle r\rangle \to F^*$ 使 λ^G 与 μ^G 都是 D_m 的不可约特征标. 则

$$(\lambda^G, \mu^G) = (\lambda, \mu + \overline{\mu})_{\langle r\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{如 } \lambda \neq \mu, \overline{\mu}, \\ 1, & \text{如 } \lambda = \mu \text{ 或 } \overline{\mu}. \end{cases}$$

因此我们的结论可分两种情形来叙述:

(a) m 是奇数. 此时因 D_m 的导群 D_m' 等于 $\langle r\rangle, [D_m : D_m'] = 2$, 故存在二个次数等于 1 的特征标与 $\frac{1}{2}(m-1)$ 个如上形为 λ^G 的相异不可约特征标. 由于 $2\cdot 1 + \frac{1}{2}(m-1)\cdot 2^2 = 2m$, 我们已得到了 D_m 的所有不可约特征标.

(b) m 是偶数. 此时 $D'_m = \langle r^2 \rangle, [D_m : D'_m] = 4$. 故存在 4 个次数为 1 的特征标与 $\frac{1}{2}(m-2)$ 个如上形为 λ^G 的相异不可约特征标. 由于 $4 \cdot 1 + \frac{1}{2}(m-2) \cdot 2^2 = 2m$, 我们也得到了 D_m 的不可约特征标的完全集.

在 (2.2.2) 里我们讨论过群 G 的反轭表示. 现在我们来考虑诱导表示与反轭表示之间的关系.

(5.2.6) 命题 设 $H \leqslant G$. L 是 $F[H]$ 模. 则存在 $F[G]$ 模同构 $(L^G)^* \cong (L^*)^G$.

证 设 $s_1, \cdots, s_n$ 是 G 关于 H 的左陪集代表系, 则我们有 F 空间分解

$$L^G = \bigoplus_{i=1}^{n} s_i \otimes L, \quad (L^*)^G = \bigoplus_{i=1}^{n} s_i \otimes L^*.$$

$\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 定义映射 $f_i : L^* \to (L^G)^*$, 使得

$$f_i(\varphi)(s_j \otimes l) = \delta_{ij}\varphi(l), \quad \forall \varphi \in L^*, l \in L.$$

再定义映射 $\psi : (L^*)^G \to (L^G)^*$ 为

$$\psi(\sum s_i \otimes \varphi_i) = \sum f_i(\varphi_i).$$

易证 ψ 是 F 线性同构. 为了证明 ψ 是 $F[G]$ 模同构, 我们只须证明

$$\psi(xs_i \otimes \varphi) = xf_i(\varphi), \quad \forall x \in G, \varphi \in L^*.$$

设 $xs_i = s_j h$, $h \in H$, 则

$$\psi(xs_i \otimes \varphi) = \psi(s_j \otimes h\varphi) = f_j(h\varphi).$$

于是

$$\begin{aligned}\psi(xs_i \otimes \varphi)(s_k \otimes l) &= f_j(h\varphi)(s_k \otimes l) = \delta_{jk}(h\varphi)(l) \\ &= \delta_{jk}\varphi(h^{-1}l), \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n, \quad l \in L.\end{aligned}$$

另一方面,

$$(xf_i(\varphi))(s_k \otimes l) = f_i(\varphi)(x^{-1}s_k \otimes l) = \begin{cases} 0, & \text{如 } k \neq j, \\ \varphi(h^{-1}l), & \text{如 } k = j. \end{cases}$$

因此命题得证. □

注 当 $F \subseteq \mathbb{C}$ 时, 上述命题可通过比较特征标来证明: 设 λ 是 L 的特征标, 则 $\overline{\lambda}$ 是 L^* 的特征标. 因为 $\overline{\lambda^G} = (\overline{\lambda})^G$, 所以由 $F[G]$ 模的完全可约性知: $(L^G)^* \cong (L^*)^G$.

习 题

1. 设 $H \leqslant K \leqslant G, \varphi \in \mathrm{cf}(H)$. 证明: $(\varphi^K)^G = \varphi^G$.

2. 设 $H, K \leqslant G, HK = G, \varphi \in \mathrm{cf}(H)$. 证明: $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H\bigcap K})^K$.

3. 设 $H \leqslant G, \varphi \in \mathrm{cf}(H), \psi \in \mathrm{cf}(G)$. 证明: $(\varphi\psi_H)^G = \varphi^G\psi$.

4. 证明 Frobenius 互反公式刻画了类函数的诱导, 即证明: 如 $\psi \in \mathrm{cf}_F(H)$ 与 $\psi' \in \mathrm{cf}_F(G)$ 满足条件

$$(\psi', \zeta) = (\psi, \zeta_H), \forall \zeta \in \mathrm{cf}_F(G),$$

则 $\psi' = \psi^G$.

5. 设 G 有一个阿贝尔 Sylow p 子群. 则 $|G' \bigcap Z(G)|$ 不被 p 整除, 这里 G' 是 G 的导群.

6. 设 $H \leqslant G, \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G), \xi \in \mathrm{cf}(H)$. 记 $\mathcal{L} \bigcap H = \mathcal{L}_1 \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{L}_m$, 这里 $\mathcal{L}_i$ 是 H 共轭类. 任取 $x \in \mathcal{L}$ 和 $x_i \in \mathcal{L}_i$. 证明:

$$\xi^G(x_{\mathcal{L}}) = |C_G(x)| \sum_{i=1}^{m} \frac{\xi(x_i)}{|C_H(x_i)|}.$$

§5.3 诱导表示不可约性的判则

设 $H \leqslant G$. 则由命题 (5.2.1) (b) 知: 如 W 为 H 的可约表示, 则诱导表示 W^G 必定为 G 的可约表示. 现在要问: 如 W 是 H 的不可约表示, 则 W^G 是否必定为 G 的不可约表示呢? 一般来讲, 这是不成立的. 下面我们要给出一个关于诱导表示不可约性的判则. 为此先要证明 Mackey 的子群定理和张量积定理.

(5.3.1) 定理 (Mackey 的子群定理) 设 $H, K \leqslant G$. U 是 $F[H]$ 模. 把 U 等同于 U^G 的 $F[H]$ 子模 $1 \otimes U$. 令 Δ 为 G 的 (K, H) 双陪集集合, 则

(a) $(U^G)_K = \bigoplus\limits_{D \in \Delta} DU$, 这里 $DU := \sum\limits_{g \in D} gU$ 是 $(U^G)_K$ 的 $F[K]$ 子模.

(b) 记 ${}^gH = gHg^{-1}, \forall g \in G$. 则存在 $F[K]$ 模同构

$$DU \cong ((gU)_{K\bigcap {}^gH})^K, \quad \forall g \in D, D \in \Delta.$$

证 设 $\{s_1, \cdots, s_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集代表系, 则由诱导表示的定义知

$$U^G = s_1U \oplus \cdots \oplus s_rU.$$

如 $g \in G$, 则

$$D = KgH = s_{i_1}H \bigcup \cdots \bigcup s_{i_t}H,$$

这里 $s_{i_1},\cdots,s_{i_t}$ 互不相同. 于是

$$DU = KgHU = s_{i_1}U \oplus \cdots \oplus s_{i_t}U.$$

这推出 (a).

令 $DU = KgU$ 是 $(U^G)_K$ 的 $F[K]$ 子模, 而 gU 是 DU 的 $F[K\bigcap {}^gH]$ 子模. 我们看到: 如果 $\{k_i|1\leqslant i\leqslant q\}$ 是 K 关于 $K\bigcap^g H$ 的左陪集代表系. 则 $\{k_ig\}$ 是 $D = KgH$ 中所含 G 关于 H 的左陪集代表系. 可设 $\{k_ig\} = \{s_{i_1},\cdots,s_{i_t}\}$, 则 $q=t$ 及

$$DU = k_1gU \oplus \cdots \oplus k_qgU.$$

现根据诱导表示的定义, 我们有 $F[K]$ 模同构

$$DU \cong \left((gU)_{{}^gH\bigcap K}\right)^K.$$

(b) 得证. □

现给出二个应用子群定理的例子:

(a) 令 $H \lhd G$, U 为 H 的 F 表示. 在定理 (5.3.1) 中取 $K=H$. 我们有

$$(U^G)_H \cong \bigoplus_{a\in R} {}^aU,$$

这里 R 是 G 关于 H 的左陪集代表系, ${}^aU$ 是与 U 共轭的 H 表示.

(b) 令 $H\leqslant G$. 由定理 (5.3.1) 知

$$(1_H^G)_H \cong \bigoplus_{a\in D}\left(1_{{}^aH\bigcap H}\right)^H,$$

这里 D 是 G 的 (H,H) 双陪集代表系, 用 G 集的语言来讲, 这相当于

$$\mathrm{Res}_H^G(G/H) \cong \dot{\bigcup_{a\in D}} H/({}^aH\bigcap H)$$

给出了当作 H 集的 G 集 G/H 的关于可迁 H 集 $H/({}^aH\bigcap H)$ 的无交并分解, 这里记号 $\mathrm{Res}_H^G(G/H)$ 表明把 G 集 G/H 当作 H 集, $\cong$ 表示 H 集同构. $\dot{\bigcup}$ 表示无交并.

由定理 (5.2.4) 知

$$(1_H^G, 1_H^G)_G = (1_H, (1_H^G)_H)_H = \sum_{a\in D}\left(1_H, (1_{{}^aH\bigcap H})^H\right)_H.$$

通过计算得

$$\begin{aligned}
\left(1_H,(1_{{}^aH\bigcap H})^H\right)_H &= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}(1_{{}^aH\bigcap H})^H(g)\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\frac{1}{|{}^aH\bigcap H|}\sum_{b\in H}\dot{1}_{{}^aH\bigcap H}(b^{-1}gb)\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{b\in H}\left(\frac{1}{|{}^aH\bigcap H|}\sum_{g\in H}\dot{1}_{{}^aH\bigcap H}(b^{-1}gb)\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

这推出 $(1_H^G,1_H^G)_G=|D|$ (见 §5.1 的习题 4(c)).

数 $(1_H^G,1_H^G)_G$ 称为可迁置换表示 1_H^G 的秩.

(5.3.2) 定理 (Mackey 的张量积定理) *设 $H_1,H_2\leqslant G$, (σ_i,U_i) 是 $H_i, i=1,2$ 的 F 表示. R 是 G 的 (H_1,H_2) 双陪集代表系. 置 $H^{(1,g)}=H_1\bigcap {}^gH_2$. 则存在 $F[G]$ 模同构*

$$U_1^G\otimes U_2^G\cong\bigoplus_{g\in R}((U_1)_{H^{(1,g)}}\otimes(gU_2)_{H^{(1,g)}})^G.$$

证 由命题 (5.2.1) (c) 知: 表示 $\sigma_1^G\otimes\sigma_2^G$ 等价于表示 $(\sigma_1\otimes(\sigma_2^G)_{H_1})^G$. 由定理 (5.3.1) 知: $(U_2^G)_{H_1}$ 是同构于

$$((gU_2)_{H^{(1,g)}})^{H_1},g\in R,$$

的 $F[H_1]$ 子模的直和. 故存在 $F[G]$ 模同构

$$U_1^G\otimes U_2^G\cong\bigoplus_{g\in R}(U_1\otimes((gU_2)_{H^{(1,g)}})^{H_1})^G. \tag{1}$$

由命题 (5.2.1) (c) 知存在 $F[H_1]$ 模同构

$$U_1\otimes((gU_2)_{H^{(1,g)}})^{H_1}\cong((U_1)_{H^{(1,g)}}\otimes(gU_2)_{H^{(1,g)}})^{H_1}.$$

于是由命题 (5.2.1) (a) 知存在 $F[G]$ 模同构

$$((U_1\otimes(gU_2)_{H^{(1,g)}})^{H_1})^G\cong((U_1)_{H^{(1,g)}}\otimes(gU_2)_{H^{(1,g)}})^G. \tag{2}$$

把 (2) 式代入 (1) 式即得所要求的结果. □

设 $(\tau,W)\in R_F(G)^+$. 令

$$\operatorname{Inv}\tau:=\{x\in W|\tau(g)x=x,\forall g\in G\}.$$

显然, Inv τ 是 W 的子空间. $x \neq 0$ 属于 Inv τ 当且仅当 Fx 是 $\tau(G)$ 不变子空间且 τ 在 Fx 上的限制是 G 的单位表示. 于是, 如果 τ 是 G 的完全可约表示, 则 $\dim(\text{Inv }\tau)$ 等于单位表示 $\mathbf{1}_G$ 在 τ 中出现的重数.

设 $(\rho_i, V_i) \in R_F(G)^+, i = 1, 2$. 回忆在 (2.1.9) 里我们定义了 G 的表示 $(\rho, \text{Hom}_F(V_1, V_2))$ 使得

$$\rho(g)l = \rho_2(g)l\rho_1(g)^{-1}, \quad \forall g \in G, l \in \text{Hom}(V_1, V_2).$$

据 (2.2.5), 我们有 $\rho \sim \rho_1^* \otimes \rho_2$. 记 $A = F[G]$. 于是

$$\begin{aligned}\text{Inv }\rho = \text{Hom}_A(V_1, V_2) &= \{l \in \text{Hom}_F(V_1, V_2) | \rho(g)l = l, \forall g \in G\} \\ &= \{l \in \text{Hom}_F(V_1, V_2) | \rho_2(g)l = l\rho_1(g), \ \forall g \in G\}.\end{aligned}$$

令 $(\rho, V), (\tau, W) \in R_F(G)^+$. 我们称 $\dim_F(\text{Hom}_A(V, W))$ 为表示 ρ 与 τ (或 A 模 V 与 W) 的**交结数**, 记作 $l(\rho, \tau)$ (或 $l(V, W)$). 如 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 和 $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ 是 A 子模的直和分解, 则 $\text{Hom}_A(V, W) = \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_A(V_i, W_j)$.

令 $\rho_i = \rho_{V_i}$ 与 $\tau_j = \tau_{W_j}$. 则

$$l(\rho, \tau) = \sum_{i,j} l(\rho_i, \tau_j). \tag{3}$$

如 ρ 与 τ 都完全可约, 又如 $\forall i, j$, ρ_i 与 τ_j 都不可约, 则关于交结数 $l(\rho, \tau)$ 的计算可归结为 $l(\rho_i, \tau_j)$ 的计算. 据引理 (1.4.2) 知: 当 ρ 与 τ 都不可约时, 我们有

$$l(\rho, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{如 } \rho \nsim \tau, \\ \dim_F(\text{End}_A V), & \text{如 } \rho \sim \tau. \end{cases}$$

此时, 如果 F 是 G 的分裂域, 则

$$l(\rho, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{如 } \rho \nsim \tau, \\ 1, & \text{如 } \rho \sim \tau, \end{cases} \tag{4}$$

由 (3) 式与 (4) 式推出:

(5.3.3) 命题 *设 F 是 G 的分裂域. 设 $\rho \in \overline{\text{Irr}_F} G$, 及 $\tau \in R_F(G)^+$ 完全可约. 则 $l(\rho, \tau) = l(\tau, \rho)$, 它们都等于 ρ 在 τ 中出现的重数.*

设 $\rho_1, \rho_2 \in R_F(G)^+$ 完全可约. 如果 ρ_1 与 ρ_2 没有公共的不可约分量, 即如果 ρ_1 与 ρ_2 不含等价的不可约子表示, 则称 ρ_1 与 ρ_2 **不相交**.

(5.3.4) 命题 *设 $\text{char}.F \nmid |G|$. 设 $(\rho_i, V_i) \in R_F(G)^+, i = 1, 2$. 则*

(a) $l(\rho_1, \rho_2)$ 等于 1_G 在 $\rho_1^* \otimes \rho_2$ 中出现的重数.

(b) ρ_1 与 ρ_2 不相交当且仅当 $1_G \not\leqslant \rho_1^* \otimes \rho_2$.

(c) 设 F 是 G 的分裂域, $(\rho, V) \in R_F(G)^+$. 则 ρ 不可约当且仅当 1_G 在 $\rho^* \otimes \rho$ 中出现的重数等于 1.

证 根据定理 (3.1.1), 在命题的假设下, G 的任何表示都完全可约.

(a) 设 $(\rho, \mathrm{Hom}(V_1, V_2)) \in R_F(G)^+$ 满足

$$\rho(g)l = \rho_2(g)l\rho_1(g)^{-1}, \quad \forall g \in G, l \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2).$$

则由 (2.2.5) 知: $\rho \sim \rho_1^* \otimes \rho_2$. 故我们有

$$\begin{aligned} l(\rho_1, \rho_2) &= \dim_F(\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)) = \dim_F(\mathrm{Inv}\ \rho) \\ &= \dim_F(\mathrm{Inv}(\rho_1^* \otimes \rho_2)). \end{aligned}$$

因上式右端等于 1_G 在 $\rho_1^* \otimes \rho_2$ 中出现的重数. 这推出 (a).

(b) 由 (3) 式与引理 (1.4.2) 知

$$\begin{aligned} \rho_1 \text{ 与 } \rho_2 \text{ 不相交} &\iff l(\rho_1, \rho_2) = 0 \\ &\iff \mathrm{Inv}(\rho_1^* \otimes \rho_2) = 0 \qquad \text{由 (a)} \\ &\iff 1_G \not\leqslant \rho_1^* \otimes \rho_2. \end{aligned}$$

(c) 由 (4) 式, 定理 (5.2.4) 与本命题的假设条件知

$$\begin{aligned} \rho \text{ 不可约} &\iff l(\rho, \rho) = 1 \\ &\iff \dim_F(\mathrm{Inv}(\rho^* \otimes \rho)) = 1 \qquad \text{由 (a)} \\ &\iff 1_G \text{ 在 } \rho^* \otimes \rho \text{ 中出现的重数等于1.} \end{aligned}$$

□

(5.3.5) 引理 设 $\mathrm{char.F} \nmid |G|, K \leqslant G$ 及 $(\tau, V) \in R_F(K)^+$. 则 1_K 出现在 τ 中的重数等于 1_G 出现在 τ^G 中的重数.

证 由引理的假设条件知 G 的任何表示都完全可约, 故只要对于 τ 是不可约的情形证明本引理即可. 此时

$$1_K \text{ 在 } \tau \text{ 中出现的重数} = \begin{cases} 1, & \text{如 } \tau \sim 1_K, \\ 0, & \text{如 } \tau \nsim 1_K. \end{cases}$$

再由定理 (5.2.3) 推得

$$\begin{aligned} 1_G \text{ 在 } \tau^G \text{ 中出现的重数} &= \tau \text{ 在 } 1_K \text{ 中出现的重数} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{如 } \tau \sim 1_K, \\ 0, & \text{如 } \tau \nsim 1_K. \end{cases} \end{aligned}$$

□

现在我们可以证明关于诱导表示不可约性的一个判则.

(5.3.6) 定理　设 $H \leqslant G$, F 是 G 的分裂域使 $\mathrm{char}.F \nmid |G|$. 又设 $(\sigma, U) \in R_F(H)^+$. 则 σ^G 不可约当且仅当下列条件满足:

(a) σ 不可约.

(b) $\forall g \in G-H, H\bigcap {}^gH$ 在 U 上的表示与在 gU 上的表示不相交.

证　由命题 (5.2.1)(b) 知: σ 不可约是 σ^G 不可约的必要条件. 故我们只要证: 如 σ 不可约, 则

$$\sigma^G \text{ 不可约} \Leftrightarrow \text{条件 (b) 成立}.$$

现设 σ 不可约. 由命题 (5.3.4) (c) 知: σ^G 不可约当且仅当 1_G 在 $(\sigma^G)^* \otimes \sigma^G$ 中的重数为 1. 因为 $(\sigma^G)^* \sim (\sigma^*)^G$, 故由定理 (5.3.2) 推出: 存在 A 模同构

$$(U^*)^G \otimes U^G \cong \bigoplus_g (U^*_{H\bigcap {}^gH} \otimes (gU)_{H\bigcap {}^gH})^G, \tag{5}$$

这里 g 取遍 G 的 (H,H) 双陪集的集合 Δ 的一个代表系. 显然,

$$U^*_{H\bigcap {}^gH} = (U_{H\bigcap {}^gH})^*.$$

我们必须考虑平凡模 (即提供表示 1_G 的 A 模) 出现在每个模

$$((U_{H\bigcap {}^gH})^* \otimes (gU)_{H\bigcap {}^gH})^G$$

中的重数.

现设 $K = H\bigcap {}^gH, g \in G$ 与 $V = (U_{H\bigcap {}^gH})^* \otimes (gU)_{H\bigcap {}^gH}$. 如 $g \in H$, 则 $K = H$ 与 $V = U^* \otimes U$. 因 σ 不可约, 故命题 (5.3.4) (c) 告诉我们: 1_H 在 $\sigma^* \otimes \sigma$ 中出现的重数为 1. 于是由引理 (5.3.5) 知 1_G 在 $(U^* \otimes U)^G$ 中的重数为 1. 因此由 (5) 式推得

$$\begin{aligned}\sigma^G \text{ 不可约} &\Longleftrightarrow \forall g \in G-H, K = H\textstyle\bigcap {}^gH \text{ 的单位表示在}\\ &\qquad U^*_K \otimes (gU)_K \text{ 中的重数为零}.\\ &\Longleftrightarrow \forall g \in G-H, H\textstyle\bigcap {}^gH \text{ 在 } U \text{ 上的表示与在 } gU \text{ 上的表示不相交}.\end{aligned}$$

这后一个等价关系由命题 (5.3.4)(b) 推出. □

最后我们要讨论定理 (5.3.6) 的一些有趣特例.

(5.3.7) 定义　如群 G 的表示有形状 $\rho = \sigma^G$, 这里 σ 是 G 的某子群 H 的一次表示, 则称 ρ 为 G 的单项表示.

容易看出: 对于 G 的每个单项表示 (ρ, V), 存在 V 的基 B 使 $\forall g \in G$, 表示矩阵 $\rho_B(g)$ 为单项矩阵, 即每行每列恰有一个非零系数的矩阵, 且非零系数的位置与元素 g 的选取无关.

从定理 (5.3.6) 可立即导出关于单项表示不可约性的判则.

(5.3.8) 推论 (K.Shoda) *设 $H \leqslant G$, F 是 G 的分裂域且满足 $\mathrm{char}.\mathrm{F} \nmid |G|$. 设 $\rho = \sigma^G$ 是 G 在 F 上的单项表示, 这里 σ 为 H 的一次表示. 则*

$$\rho \text{ 不可约} \iff \forall g \in G - H, \text{ 存在 } h \in H \bigcap {}^g H \text{ 使 } \sigma(h) \neq \sigma(ghg^{-1}).$$

设 $H \lhd G$. 在 (2.3.4) 里我们已介绍过关于 H 的共轭表示的概念. 此时定理 (5.3.6) 有较简单的形式.

(5.3.9) 推论 *沿用定理 (5.3.6) 的记号 G, H, F 与 σ. 设 $H \lhd G$, 则*

$$\sigma^G \text{ 不可约} \iff \sigma \text{ 不可约, 且 } \forall g \in G - H, \text{ 有 } {}^g\sigma \nsim \sigma.$$

我们要导出关于推论 (5.3.9) 的一个重要推广. 设 $H \lhd G$, $(\sigma, U) \in \overline{\mathrm{Irr}}_F H$. 回忆在 (2.3.4) 里我们定义了 σ 在 G 中的惯性群为

$$T(\sigma) := \{g \in G | {}^g\sigma \sim \sigma\}.$$

(5.3.10) 推论 *沿用定理 (5.3.6) 的记号 G, H, F 与 σ. 设 $H \lhd G$. 令 ψ 为惯性群 $T = T(\sigma)$ 的不可约表示使 ψ_H 含子表示 σ. 则 ψ^G 不可约.*

证 设 V 是对应于 ψ 的 $F[T]$ 模. 则由定理 (3.1.3) 知 σ 是 ψ_H 所仅有的不可约分量. 现考虑 V^G. 如前, 可把 V 看作 V^G 的 $F[T]$ 子模, 也可把 V^G 的 F 子空间 gV 看作 $F[T \bigcap {}^g T]$ 模, 这里 $g \in G - T$. 由于 $H \lhd G$, 我们有 $H \subset T \bigcap {}^g T$, 且 gV 是同构于 gU 的不可约 $F[H]$ 子模的和. H 在 gU 上的表示为 ${}^g\sigma$. 因为 $g \notin T$, 所以 ${}^g\sigma \nsim \sigma$. 这推出 H 在 V 上的表示与在 gV 上的表示不相交. 于是 $T \bigcap {}^g T$ 在 V 上的表示与在 gV 上的表示也不相交. 因此, 由定理 (5.3.6) 知 ψ^G 不可约. □

最后, 我们要应用诱导表示的不可约性判则来研究满足某种条件的群的某些不可约特征标的性质.

设 $H \lhd G$. $\forall g \in G$, $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$ 与 H 的共轭类 $\mathscr{C}$, 定义 $g(\psi) := {}^g\psi$ 与 $g(\mathscr{C}) := \{gxg^{-1} | x \in \mathscr{C}\}$. 这给出了 G 在 $\mathrm{Irr}_F H$ 上与在 H 的共轭类集合上的作用. 以下定理揭示了 G 的这两种作用之间的联系.

(5.3.11) 定理 (Brauer) *设群 K 作用在 $\mathrm{Irr}_F G$ 上与在 G 的共轭类集合 $\mathrm{Cl}(G)$ 上, 且满足条件*

$$\alpha(\chi)_{\alpha(\mathscr{C})} = \chi_{\mathscr{C}}, \quad \forall \alpha \in K, \chi \in \mathrm{Irr}_F G \text{ 与 } \mathscr{C} \in \mathrm{Cl}(G),$$

这里 $\chi_{\mathscr{C}} = \chi(g)$, $g \in \mathscr{C}$. 则 $\forall \alpha \in K$, 等式

$$|\{\chi \in \mathrm{Irr}_F G | \alpha(\chi) = \chi\}| = |\{\mathscr{C} \in \mathrm{Cl}(G) | \alpha(\mathscr{C}) = \mathscr{C}\}|$$

成立.

证 设 $\mathbf{X}$ 为 G 的特征标表矩阵. 则每个元素 $\alpha \in K$ 在 $\mathrm{Irr}_F G$ (或 $\mathrm{Cl}(G)$) 上的作用引起了 $\mathbf{X}$ 的行 (或列) 置换: 把对应于 χ (或 $\mathscr{C}$) 的行 (或列) 置换到对应于 $\alpha(\chi)$(或 $\alpha(\mathscr{C})$) 的行 (或列) 的位置. 于是存在唯一的置换矩阵 $\mathbf{Y}(\alpha)$ (或 $\mathbf{Z}(\alpha)$) 使得 $\mathbf{Y}(\alpha)\mathbf{X}$ (或 $\mathbf{X}\mathbf{Z}(\alpha)$) 等于由 α 对 $\mathbf{X}$ 的行 (或列) 置换所得到的矩阵. 由于

$$\alpha(\chi)_{\mathscr{C}} = \chi_{\alpha^{-1}(\mathscr{C})}, \qquad \forall \chi \in \mathrm{Irr}_F G, \mathscr{C} \in \mathrm{Cl}(G),$$

这推出 $\mathbf{Y}(\alpha)\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{Z}(\alpha^{-1})$. 由特征标的正交关系知 $\mathbf{X}$ 是可逆矩阵. 这推出 $\mathbf{Y}(\alpha)$ 与 $\mathbf{Z}(\alpha^{-1})$ 有相同的迹. 但 $\mathbf{Y}(\alpha)$ (或 $\mathbf{Z}(\alpha)$) 的迹等于被对应于 α (或 α^{-1}) 的置换所固定的行 (或列) 的个数. 因此

$$\begin{aligned} |\{\chi \in \mathrm{Irr}_F G | \alpha(\chi) = \chi\}| &= |\{\mathscr{C} \in \mathrm{Cl}(G) | \alpha^{-1}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}\}| \\ &= |\{\mathscr{C} \in \mathrm{Cl}(G) | \alpha(\mathscr{C}) = \mathscr{C}\}|, \ \forall \alpha \in K. \end{aligned}$$

□

以下结论给出了满足某种条件的群的某些不可约特征标的性质. 它对于以后要介绍的 Frobenius 群的不可约特征标的计算特别有用.

(5.3.12) 定理 令 $H \lhd G$. 设 $C_G(h) \subseteq H$, $\forall 1 \neq h \in H$.

(a) 设 $1_H \neq \psi \in \mathrm{Irr}_F H$, 则 $\psi^G \in \mathrm{Irr}_F G$.

(b) 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$ 与 $H \not\subseteq \mathrm{Ker}\chi$, 则存在某 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$ 使 $\chi = \psi^G$.

证 (a) 由推论 (5.3.9) 知: 为了证明 ψ^G 不可约, 只要证明: $\forall g \in G - H$, 有 ${}^g\psi \neq \psi$. 据定理 (5.3.11), 这只要证明: 对于 H 的每个共轭类 $\mathscr{C} \neq \{1\}$ 与 $x \in G$, 由等式 $x\mathscr{C}x^{-1} = \mathscr{C}$ 可推出 $x \in H$. 令 $h \in \mathscr{C}$. 则由 $x\mathscr{C}x^{-1} = \mathscr{C}$ 可推出存在某 $y \in H$ 使 $xhx^{-1} = yhy^{-1}$. 于是 $y^{-1}x \in C_G(h)$. 因为 $h \neq 1$, 由条件 $C_G(h) \subseteq H$ 知 $y^{-1}x \in H$. 这推出 $x \in H$. 故 (a) 得证.

(b) 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. 设 $H \not\subseteq \mathrm{Ker}\chi$. 则至少存在一个 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$, $\psi \neq 1_H$, 使 $\psi \leqslant \chi_H$. 于是由 (a) 知 $\psi^G \in \mathrm{Irr}_F G$. 再由定理 (5.2.4) 得 $(\chi, \psi^G) \neq 0$. 这迫使 $\chi = \psi^G$. □

习 题

1. 设 $H, K \leqslant G, \psi \in \mathrm{ch}_F^+(H), (\psi^G)_K \in \mathrm{Irr}_F K$. 证明: $HK = G$.

提示 关键是证明 $((\psi^G)_K, (\psi_{H \cap K})^K) \neq 0$. 由此推出 $[G : H] \leqslant [K : K \bigcap H]$.

2. 证明: (a) G 的单项表示在 G 的子群 H 上的限制是 H 的单项表示的直和.

(b) 类似的结论关于 G 的可迁置换表示也成立.

3. (Blichfeldt) 设 F 是代数闭域, M 是 G 的忠实的不可约 F 表示. 设 A 是 G 的不属于中心的阿贝尔正规子群. 令 L 为 ${}_{F[A]}M$ 的不可约分量. $\widetilde{L}$ 为 ${}_{F[A]}M$ 的 L 齐次分支, $\widetilde{A}$ 为 $\widetilde{L}$ 在 G 中的稳定子. 则 $\widetilde{A}$ 是 G 的真子群, 且存在 $F[G]$ 模同构:

$$M \cong \widetilde{L}_{\widetilde{A}}^{G}.$$

4. 如果 G 的每个不可约表示是单项表示, 则称 G 为 M 群. 证明: 超可解群 G 是 M 群.

提示 先证明超可解群的子群与同态像也是超可解群. 故问题可归结为证明 G 的忠实不可约表示为单项表示. 然后证明每个非阿贝尔超可解群有不含于中心的阿贝尔正规子群. 再应用习题 3 的结论.

5. 证明: 每个 M 群都是可解群.

提示 如结果不真, 则存在非可解的 M 群 G 使 $|G|$ 为极小. 证明 G 有唯一非平凡极小正规子群 A 且 $A \neq G$. 于是存在 G 的不可约表示 ρ 使 $\mathrm{Ker}\,\rho \not\supset A$. 取这样的 ρ 使 $\deg\rho$ 达到极小. 令 $\rho = \sigma^G$, 这里 σ 是子群 H 的一次表示. 置 $\rho' = 1_H^G$. 证明: $\mathrm{Ker}\rho'$ 是 G 的非平凡阿贝尔正规子群. 故 G 可解, 与假设矛盾.

6. 找出不是 M 群的可解群的例子.

7. 设 $N \lhd G$ 且 G/N 是可解群. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, $\zeta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}N$ 与 $(\chi_N, \zeta) \neq 0$. 证明: $\chi(1)\zeta(1)$ 整除 $[G:N]$.

注: 上述结论即使当 G/N 不是可解群时也成立.

8. (Dornhoff) 设 G 是 M 群, $N \lhd G$ 及 $(|N|, [G:N]) = 1$. 证明: N 是 M 群.

提示 令 $\zeta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}N$. 找 $H \leqslant G$ 与 $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$ 使 $\lambda(1) = 1, ((\lambda^{NH})_N, \zeta) \neq 0$ 与 $\lambda^G \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 利用习题 7 的结论来证明 $\lambda^{NH}(1) = \zeta(1)$. 再利用习题 2 的结论.

9. 如 G 的共轭类 $\mathscr{C}$ 满足: $x \in \mathscr{C} \Longrightarrow x^{-1} \in \mathscr{C}$, 则称 $\mathscr{C}$ 为 G 的**实类**, 试证 G 的实类个数等于 G 的不可约实值特征标的个数.

10. 设 $A \lhd G$, A 与 G/A 都是循环群 (称具有这种正规子群 A 的群 G 为**亚循环群**). 设代数闭域 F 满足 $\mathrm{char}.F \nmid |G|$. 令 $A = \langle a \rangle$, $G/A = \langle \bar{b} \rangle$, 这里 $\bar{b}$ 是 $b \in G$ 在自然映射下的像, 令 $|A| = m, |G/A| = s$. 则 G 的元素可被唯一地表为形状 $a^i b^j, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < s$, 且存在正整数 r, t 使得

$$b^{-1}ab = a^r, \quad b^s = a^t \text{ 与 } 1 \leqslant r, t \leqslant m.$$

设 A 的自同构 $\sigma:\ a^i \mapsto b^{-1}a^i b$ 的阶数等于 u.

(a) 证明: $(m, r) = 1$, $m | t(r-1)$ 与 $u | s$. 特别

$$r^s - 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

(b) 证明: G 的导群 G' 等于 $\langle a^{r-1} \rangle$, 且 $|G'| = \dfrac{m}{d}$, 这里 $d = (r-1, m)$.

(c) 令 $(\rho_i, Fv_i), 1 \leqslant i \leqslant m$, 为 $\langle a\rangle$ 的一次 F 表示使得

$$\rho_i(a)v_i = \zeta^i v_i,$$

这里 ζ 是 m 次单位原根, 试写出 $\rho_i^G(a)$ 与 $\rho_i^G(b)$ 关于基 $\{b^j \otimes v_i | 0 \leqslant j < s\}$ 的矩阵.

(d) 证明: ρ_i^G 不可约 $\iff r^j i \not\equiv i(\mathrm{mod}\ m)$, $\forall 1 \leqslant j < s$.

(e) 设 ρ_i^G 与 ρ_j^G 都不可约. 证明: $\rho_i^G \nsim \rho_j^G \iff r^k i \not\equiv j(\mathrm{mod}\ m), 0 \leqslant k < s$.

(f) 证明: 条件 (B) :“ G 的每个不可约表示要么是一次的, 要么是形如 $\rho_i^G, 1 \leqslant i \leqslant m$ 的单项表示.” 等价于条件 (C):“ $\forall i, j, 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j < s$, 由 $r^j i \equiv i(\mathrm{mod}\ m)$ 推出 $ri \equiv i(\mathrm{mod}\ m)$.”

(g) 当 s 是素数时, G 满足 (f) 中的条件 (B).

(h) 试证 G 是 M 群.

(i) 用以上结论来描述二面体群与广义四元数群的不可约表示.

提示 (f) 里的条件 $(C) \Longrightarrow$ 条件 (B): 令 $X = \{1, 2, \cdots, m\}$. 定义映射 $\varphi : X \to X$ 为 $x \mapsto rx(\mathrm{mod}\ m), x \in X$. 令 R 为由 φ 生成的循环群. 可证 $|R| = 1$ 或 s. 当 $|R| = 1$ 时, G 是阿贝尔群. 当 $|R| = s$ 时, X 上每个 R 轨道的基数等于 1 或 s. 证明 $\{\rho_i^G | 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 中不等价的不可约表示的个数等于基数为 s 的 R 轨道的个数. 它们都等于 $\dfrac{(m-d)}{s}$. 因 G 的相异的一次表示的个数等于 sd. 故由定理 (3.1.8)(b) 可推出条件 (B).

11. 设 $H \lhd G$. 群 G 共轭作用于 $\overline{\mathrm{Irr}}_F(H)$ 和 $\mathrm{Cl}(H)$. 证明: $\overline{\mathrm{Irr}}_F(H)$ 和 $\mathrm{Cl}(H)$ 里的 G 轨道个数相等.

提示 由定理 (5.3.11) 知: G 在 $\overline{\mathrm{Irr}}_F(H)$ 和 $\mathrm{Cl}(H)$ 上有相同的置换特征标 (记作 θ), 而 G 轨道的个数等于 $(\theta, 1_G)$.

§5.4 Frobenius 群

作为前面所学到的特征标理论的一个应用, 现在我们要推导 Frobenius 在有限群理论方面的一个重要定理. Frobenius 的这个定理既是关于可迁置换群的, 也是关于抽象群的.

(5.4.1) 定义 *如 H 是 G 的非平凡子群, 它满足*

$$H \cap {}^x H = \{1\}, \quad \forall x \in G - H,$$

*则称 **G 为 Frobenius 群, 称 H 为 G 的 Frobenius 补**. 容易看出, 当 H 是 G 的 Frobenius 补时, ${}^x H$ 也是 G 的 Frobenius 补, $\forall x \in G$.*

为了推导 Frobenius 定理, 我们需要关于广义特征标为不可约特征标的一个判则.

(5.4.2) 命题 *设 $F \subseteq \mathbb{C}$ 是 G 的分裂域, $\chi \in \mathrm{ch}_F(G)$. 则*

$$\chi \in \mathrm{Irr}_F G \Leftrightarrow (\chi, \chi) = 1 \text{ 与 } \chi(1) > 0.$$

证 (⇒) 显然.

(⇐) 可写

$$\chi = \sum_i n_i \chi_i, \tag{1}$$

这里 $n_i \in \mathbb{Z}, \chi_i \in \mathrm{Irr}_F G$. 则

$$(\chi, \chi) = \sum_i n_i^2 = 1.$$

这推出在等式 (1) 中存在正整数 j 使

$$n_i = \begin{cases} \pm 1, & \text{如 } i = j, \\ 0, & \text{如 } i \neq j. \end{cases}$$

故由 $\chi(\mathbf{1}) > 0$ 推出 $\chi = \chi_j$. □

(5.4.3) 定理 (Frobenius) *设 G 是以 H 为补的 Frobenius 群, 则 G 中存在唯一的正规子群 N 使*

$$G = NH,$$
$$N \bigcap H = \{\mathbf{1}\}.$$

证 令 $S = \left(G - \bigcup_{x \in G} {}^x H\right) \bigcup \{\mathbf{1}\}$. 我们要证明 S 是 G 的符合定理要求的正规子群.

(a) 先证 $|S| = [G:H]$.

由 Frobenius 补的定义知: $H = N_G(H)$, 这里 $N_G(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子. 故恰存在 H 的 $[G:H]$ 个互异的共轭子群 ${}^x H$. 这些子群两两之交均等于 $\{\mathbf{1}\}$. 故 $\bigcup_{x \in G} {}^x H$ 共含有 $1 + [G:H](|H| - 1)$ 个元素. 于是

$$|S| = |G| - [G:H](|H| - 1) = [G:H].$$

(b) 其次证: 如 $\theta \in \mathrm{cf}(H)$ 满足 $\theta(\mathbf{1}) = 0$, 则 $(\theta^G)_H = \theta$.

据定义知

$$\theta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{a \in G} \dot{\theta}(a^{-1} g a), \quad \forall g \in G.$$

故 $\theta^G(\mathbf{1}) = [G:H]\theta(\mathbf{1}) = 0$. $\forall h \in H, h \neq \mathbf{1}$ 与 $a \in G - H$, 我们有

$$a^{-1} h a \notin H.$$

故 $\dot{\theta}(a^{-1} h a) = 0$.

这推出 $\forall h \in H$,

$$\theta^G(h) = \frac{1}{|H|}\sum_{a\in H}\dot{\theta}(a^{-1}ha) = \frac{1}{|H|}\sum_{a\in H}\theta(a^{-1}ha) = \theta(h).$$

(c) 引进子群 S^*.

设 $\psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$ 满足 $\psi \neq 1_H$. 定义

$$\varphi := \psi - \psi(1)1_H.$$

则 $\varphi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(H)$ 满足 $\varphi(1) = 0$, 故由 (b) 推出 $\varphi^G \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(G)$ 满足 $(\varphi^G)_H = \varphi$. 据定理 (5.2.4) 知

$$\begin{aligned}(\varphi^G, \varphi^G)_G &= (\varphi, (\varphi^G)_H)_H = (\varphi, \varphi)_H \\ &= (\psi - \psi(1)1_H, \psi - \psi(1)1_H)_H = 1 + \psi(1)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

于是

$$(\varphi^G, 1_G)_G = (\varphi, 1_H)_H = (\psi - \psi(1)1_H, 1_H)_H = -\psi(1). \tag{3}$$

定义 $\psi^* := \varphi^G + \psi(1)1_G$. 则

$$\psi^* \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(G). \tag{4}$$

由等式 (2) 与 (3) 知

$$\begin{aligned}(\psi^*, \psi^*)_G &= (\varphi^G, \varphi^G)_G + 2\psi(1)(\varphi^G, 1_G)_G + \psi(1)^2 \\ &= 1 + \psi(1)^2 - 2\psi(1)^2 + \psi(1)^2 = 1.\end{aligned} \tag{5}$$

我们也有

$$(\psi^*)_H = (\varphi^G)_H + \psi(1)(1_G)_H = \varphi + \psi(1)1_H = \psi. \tag{6}$$

故

$$\psi^*(1) = \psi(1) > 0. \tag{7}$$

由 (4) 式, (5) 式, (7) 式及命题 (5.4.2) 推知 $\psi^* \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 因此由 (6) 式知: $\forall \psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H, \psi \neq 1_H$, 存在 $\psi^* \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 使 $\psi^*_H = \psi$.

置 $S^* = \bigcap\limits_{\psi} \mathrm{Ker}\psi^*$, 这里 ψ 取遍 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H - \{1_H\}$. 显然, S^* 是 G 的正规子群.

(d) 再证: $S = S^*$.

首先证明: $S \subset S^*$. 显然, $1 \in S^*$. 令 $1 \neq k \in S$. 则有

$$k \notin {}^gH, \quad \forall g \in G.$$

故 $\zeta^G(k) = 0,\ \forall \zeta \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(H)$.

于是,

$$\psi^*(k) = \varphi^G(k) + \psi(1)1_G(k) = \varphi^G(1) + \psi(1)1_G(1) = \psi^*(1).$$

注意这里用到一个事实: $\varphi^G(1) = \varphi(1) = 0$.

由 ψ 的任意性推出 $k \in S^*$. 因此

$$S \subset S^*. \tag{8}$$

其次证明:

$$S^* \bigcap H = \{1\}. \tag{9}$$

令 $h \in H \bigcap S^*$. 则

$$\psi(h) = \psi^*(h) = \psi^*(1) = \psi(1), \quad \forall \psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} H.$$

故 $h \in \bigcap_{x \in \mathrm{Irr} H} \mathrm{Ker}\chi$. 因而 h 属于 H 的正则表示的核. 这推出 $h = 1$.

再证明:

$$|S^*| \,\big|\, |S|. \tag{10}$$

我们有 $$|G| = |H|[G:H] = |H||S|.$$

因 $HS^* \leqslant G$, 故 $|HS^*|$ 是 $|H||S|$ 的因子, 但另一方面我们有 $HS^*/S^* \cong H/(H \bigcap S^*)$. 于是

$$|HS^*| = |S^*||H/(H \bigcap S^*)| = \frac{|S^*||H|}{|H \bigcap S^*|} = |S^*||H|.$$

这推出 $|S^*| \mid |S|$.

由 (8) 式与 (10) 式推出 $S = S^*$.

由 (c) 与 (d) 知 $S \lhd G$. 再由 (9) 式知 $H \bigcap S = \{1\}$. 另一方面,

$$|SH| = |S^*H| = |S^*||H| = |S||H| = [G:H]|H| = |G|.$$

这推出 $G = SH$. 因此 S 是 G 中所要求的正规子群.

最后要证明满足定理条件的 S 是唯一存在的. 如另有 $N \lhd G$. 则

$$|N| = [G:H] = |S|.$$

进而有 $N \bigcap^x H = \{1\}$, $\forall x \in G$. 于是 $N \subseteq S$. 这迫使 $N = S$. □

称满足上述定理条件的 S 为 Frobenius 群 G 的 **Frobenius 核**.

以下结果给出 Frobenius 群的置换群刻画.

(5.4.4) 定理 G 是 Frobenius 群当且仅当存在某整数 $n>1$ 使 G 同构于集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上一个置换群 $\widetilde{G}$, 这里 $\widetilde{G}$ 满足下列条件:

(a) $\widetilde{G}$ 在 N 上可迁.

(b) $\forall 1\leqslant i\leqslant n$, $\mathrm{Stab}(i):=\{g\in\widetilde{G}|gi=i\}\neq\{1\}$.

(c) $\forall x\in\widetilde{G}, x\neq 1$, x 至多固定 N 的一个元素.

证 首先令 $\widetilde{G}$ 为集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的满足条件 (a)—(c) 的置换群, 取 $H=\mathrm{Stab}(1)$. 则易证 $\widetilde{G}$ 是以 H 为补的 Frobenius 群. 其次设 G 是以 H 为补的 Frobenius 群. 令 N 为 G 的 H 左陪集的集合. G 的左乘作用使 G 成为 N 上置换群. 显然, G 在 N 上可迁. 故条件 (a) 成立. $\forall a,g\in G$, $a(gH)=gH$ 当且仅当 $a\in {}^gH$. 故 $\mathrm{Stab}(gH)={}^gH$. 于是条件 (b) 成立. 我们知道条件 (c) 成立当且仅当 $\forall a,b\in G$, 由 $aH\neq bH$ 可推出 ${}^aH\bigcap{}^bH=\{1\}$. 但后者可从 H 为 G 的 Frobenius 补的假设推出. □

接着让我们描述 Frobenius 群的特征标.

(5.4.5) 命题 设 G 是以 H 为补与以 N 为核的 Frobenius 群. 则

(a) $\forall 1\neq n\in N$, 我们有 $C_G(n)\subseteq N$.

(b) 如 $\psi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}N$ 满足 $\psi\neq 1_N$, 则 $\psi^G\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 与 $N\nsubseteq\mathrm{Ker}\psi^G$. 反之, 每个使 $N\nsubseteq\mathrm{Ker}\zeta$ 的 $\zeta\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 有形状 $\zeta=\psi^G$, 这里 $\psi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}N$, $\psi\neq 1_N$.

证 只要证 (a), 然后 (b) 可从定理 (5.3.12) 推出. 令 $n\in N, n\neq 1$. 设 $C_G(n)\nsubseteq N$. 由定理 (5.4.3) 的证明中关于 N 的刻画知: 存在某 $x\in G$ 使

$$C_G(n)\bigcap{}^xH\neq\{1\}.$$

因 ${}^xH$ 也是 G 的 Frobenius 补, 故不妨设 $C_G(n)\bigcap H\neq\{1\}$. 取 $h\in C_G(n)\bigcap H$, $h\neq 1$. 则 $h\in H\bigcap{}^nH$, 这与 H 为 Frobenius 补的条件相矛盾. 故只能是 $C_G(n)\subseteq N$. □

设 G 是以 H 为补与以 N 为核的 Frobenius 群. 令 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 如 $N\subseteq\mathrm{Ker}\chi$, 则 χ 可被当作 $H\cong G/N$ 的不可约特征标, 因此由命题 (5.4.5) 可见: 关于 G 的特征标的计算可归结为关于 H 与 N 的特征标的计算.

习 题

1. 证明: 如 G 是以 H 为补的 Frobenius 群, 则 G 的 Frobenius 核是 G 的满足条件 $G=KH$ 与 $K\bigcap H=\{1\}$ 的仅有正规子群 K.

2. 设 $N\lhd G$, $H\leqslant G$, $NH=G$ 与 $N\bigcap H=\{1\}$. 证明下列条件等价:

(a) $C_G(n)\subseteq N$, $\forall 1\neq n\in N$.

(b) $C_H(n) = \{1\}$, $\forall 1 \neq n \in N$.

(c) $C_G(h) \subseteq H$, $\forall 1 \neq h \in H$.

(d) $G - N \subseteq \bigcup_{g\in G} {}^gH$.

(e) 如 $1 \neq h \in H$, 则 h 共轭于 Nh 的每个元素.

(f) G 是以 H 为补的 Frobenius 群.

3. 证明: 如 $G = \langle a, b | a^m = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$, 其中 $m \geqslant 3$ 是奇数, 则 G 是 Frobenius 群.

4. 设 F 是有限域, G 是所有如下形式的映射 $\theta : F \to F$ 的集合:

$$\theta(x) = ax + b, \quad \forall x \in F,$$

这里 $a, b \in F$, $a \neq 0$. 证明 G 在映射的合成下形成一个群, 并证明 G 是 Frobenius 群, 找出 G 的 Frobenius 核与 Frobenius 补, 再找出 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$.

提示 利用命题 (5.4.5).

5. 设 $H \leqslant G$, $m = [G : H]$ 与 $|H|$ 互素. 设 $H = N_G(H)$. $\forall g \in G$, 要么 ${}^gH = H$, 要么 ${}^gH \bigcap H = \{1\}$.

证明: (a) 集合 $K' = G - \bigcup_{g\in G} {}^gH$ 恰含 $m - 1$ 个元素.

(b) 令 $K = K' \bigcup \{1\}$. 则 $K \lhd G$, 且 $K = \{x \in G | x^m = 1\}$.

6. 设 S 是 G 的子集, 如 $S \neq \varnothing$, 且 $\forall g \in G$, 要么 ${}^gS = S$, 要么 ${}^gS \bigcap S \subset \{1\}$, 则称 S 为**平凡交集**. 证明: 如 S 是平凡交集, 则 $N_G(S) := \{g \in G | {}^gS = S\}$ 是 G 的含 S 的子群. 证明: 如 G 是以 H 为补的 Frobenius 群, 则 H 是平凡交集.

7. 设 S 是 G 的一个平凡交集, $N = N_G(S)$. 设 φ 与 ψ 是 N 上复值类函数, 它们满足条件: $\varphi(x) = \psi(x) = 0, \forall x \in G - S$, 与 $\varphi(1) = 0$. 证明:

(a) $\varphi^G(g) = \varphi(g)$, $\forall 1 \neq g \in S$.

(b) $(\varphi, \psi)_N = (\varphi^G, \psi^G)_G$.

8. 设 G 是以 H 为补与以 K 为核的 Frobenius 群, K 是阿贝尔群. 证明: G 是 M 群当且仅当 H 是 M 群.

9. 设 G 的子群 A 满足条件: $(*)$ $\quad A = C_G(a), \forall 1 \neq a \in A$.

令 $H = N_G(A)$ 和 $A^* = A \setminus \{1\}$, 置 $m = |A|, e = [H : A]$ 和 $n = (m-1)/e$.

(a) 证明: A^* 是 G 里一个平凡交集 (见习题 6).

(b) 证明: H 是以 A 为 Frobenius 核的 Frobenius 群.

提示 先证明 $|A|$ 与 $[H : A]$ 互素, 再由 Schur-Zassenhaus 定理 (见脚注)① 推出: 存在某 $B \leqslant H$ 使得 $H = A \rtimes B$, 最后利用条件 $(*)$ 证明 B 是 H 的 Frobenius 补.

(c) 证明: e 整除 $m - 1$; A^* 是 H 的 n 个共轭类之并.

提示 利用条件 $(*)$ 证明: A^* 中的 G 共轭元必为 H 共轭元; A^* 中的 H 共轭类均含 e 个元素.

---

① Schur-Zassenhaus 定理断言: 如果 $H \lhd G$ 和 $\gcd(|H|, [G : H]) = 1$ 则存在 $S \leqslant G$ 使得 $G = H \rtimes S$.

(d) 证明: 对于 A 的任何非 1_A 的线性特征标 ξ, 有 $\xi^H \in \mathrm{Irr}_K(H)$ 和 $\deg \xi^H = e$, 且 $\xi(x) = 0$, $\forall x \in H \backslash A$. $\overline{\mathrm{Irr}}_K(H) \backslash \{1_A\}$ 中线性特征标 ζ, ξ 相等当且仅当 $\zeta^H = \xi^H$.

提示　由 §5.3, 习题 11 知: A 的任何非 1_A 的线性特征标集合恰含 n 个 H 轨道. 再利用命题 (5.4.5).

§5.5　置换表示与 Burnside 环

作为本章前三节内容的应用, 让我们着重讨论一下群 G 的置换表示.

回忆在 §1.1 中我们定义过群在集合上的作用. 给定任意 G 集 S 与 T, 则无交并 $S \biguplus T$ 与笛卡尔积 $S \times T$ 上也有 G 集结构, 其中 G 在 $S \times T$ 上的作用定义如下:

$$x(s,t) = (xs, xt), \quad \forall x \in G, s \in S, t \in T.$$

把 $S \biguplus T$ 与 $S \times T$ 分别看作为 **G 集 S 与 T 的和与积**.

令 $f: S \to T$ 为满足以下条件的映射:

$$f(xs) = xf(s), \quad \forall x \in G, s \in S.$$

称这样的映射 f 为 G **集映射**. 令 $\mathrm{Hom}_G(S,T)$ 为从 S 到 T 内的所有 G 集映射的集合. 注意 $\mathrm{Hom}_G(S,T)$ 一般不是 G 集. 如存在从 S 到 T 上的 G 集双射, 则记 $S \cong T$, 称 S 与 T 为**同构的 G 集**.

注: 每个 G 集决定了 G 的一个置换表示, 同构的 G 集决定了等价的置换表示. 反之亦然. 故讨论 G 集与讨论 G 的置换表示实质上是一回事.

如 G 集 S 非空, 且不含非空的真 G 子集, 则称 S 为**单 G 集**. 显然, 单 G 集由一个 G 轨道构成, 即单 G 集是可迁 G 集, 反之亦然. 对于 G 的任意子群 H, 左陪集空间 G/H 在 G 的左乘作用下形成一个单 G 集, 反之, 对于任意单 G 集 S, 我们都能找到 G 的一个子群 H 使存在 G 集同构 $S \cong G/H$.

(5.5.1) 定义　*有限群 G 的 Burnside 环 $\Omega(G)$ 是满足下列条件的一个环:*

(a) $\Omega(G)$ 作为一个加法群由符号 $[S]$ 生成, 这里 S 取遍有限 G 集同构类的一个代表系 D, 其加法与乘法满足以下关系式: $\forall S, T \in D$,

$$[S \biguplus T] = [S] + [T],$$
$$[S \times T] = [S][T].$$

(b) 如环 Ω' 作为加法群由集合 $\{\alpha_S | S \in D\}$ 里的元素生成, 其加法与乘法满足关系式: $\forall S, T \in D$,

$$\alpha_S + \alpha_T = \alpha_{S \biguplus T},$$
$$\alpha_S \cdot \alpha_T = \alpha_{S \times T}.$$

则存在唯一的环满同态: $\Omega(G) \to \Omega'$ 使得

$$[S] \mapsto \alpha_S, \quad \forall S \in D.$$

关于 Burnside 环 $\Omega(G)$ 的另一个等价的定义如下: 令 F 为由符号 (S) 生成的自由加法群, 这里 S 取遍有限 G 集同构类的一个代表系 D. 令 F_0 为 F 的由所有元素

$$(S \dot{\cup} T) - (S) - (T), \quad \forall S, T \in D$$

生成的子群. 在 F 上定义乘法如下:

$$(S)(T) := (S \times T), \quad \forall S, T \in D.$$

则 F 关于该加法和乘法形成一个环且 F_0 为 F 的理想. 注意 $S \times T$ 与 $T \times S$ 是同构的 G 集, $\forall S, T \in D$. 故 $(S)(T) = (T)(S)$, 即 F 是交换环. 定义 $\Omega(G)$ 为商环 F/F_0, 它也是交换的. $\forall S \in D$, 以符号 $[S]$ 记 $(S) \in F$ 在自然映射下的像, 令 e_G 为由一个元素组成的 G 集 (G 在其上平凡作用). 则

$$e_G \times T \cong T, \quad \forall T \in D.$$

故 $[e_G]$ 为 $\Omega(G)$ 的恒等元.

(5.5.2) 引理 令 S, T 为两个 G 集. 则
$[S] = [T] \iff$ 存在 G 集同构 $S \cong T$.

证 ($\Longleftarrow$) 显然.

($\Longrightarrow$) 设 $[S] = [T]$. 则 $(S) - (T) \in F_0$. 故可写

$$\begin{aligned}(S) - (T) = &\sum_i ((X_i' \dot{\cup} X_i'') - (X_i') - (X_i'')) \\ &- \sum_j ((Y_j' \dot{\cup} Y_j'') - (Y_j') - (Y_j'')).\end{aligned}$$

上式右端的两个和式都允许是空的. 置 $X' = \dot{\bigcup}_i X_i'$, $X'' = \dot{\bigcup}_i X_i''$, $X = X' \dot{\cup} X''$, $Y' = \dot{\bigcup}_j Y_j'$, $Y'' = \dot{\bigcup}_j Y_j''$ 与 $Y = Y' \dot{\cup} Y''$. 由于

$$\begin{aligned}&(S) + \sum_i ((X_i') + (X_i'')) + \sum_j (Y_j' \dot{\bigcup} Y_j'') \\ = &(T) + \sum_i (X_i' \dot{\bigcup} X_i'') + \sum_j ((Y_j') + (Y_j'')).\end{aligned}$$

我们有 G 集同构:

$$S\bigcup\limits^{\cdot} X'\bigcup\limits^{\cdot} X''\bigcup\limits^{\cdot} Y\cong T\bigcup\limits^{\cdot} X\bigcup\limits^{\cdot} Y'\bigcup\limits^{\cdot} Y''.$$

显然, $Z:=X'\dot\bigcup X''\dot\bigcup Y=X\dot\bigcup Y'\dot\bigcup Y''$. 故有 G 集同构:

$$S\bigcup\limits^{\cdot} Z\cong T\bigcup\limits^{\cdot} Z.$$

令 $\{S_1,\cdots,S_k\}$ 为单 G 集同构类的一个代表系. 对 S 作 G 轨道分解如下:

$$S\cong S_1^{(n_1)}\bigcup\limits^{\cdot}\cdots\bigcup\limits^{\cdot} S_k^{(n_k)},$$

这里 $S_i^{(n_i)}$ 为 n_i 个 S_i 的无交并. 则 S 的 G 集同构类可由 k 维组 $(n_1,\cdots,n_k)$ 所唯一确定. 于是, 如果 $S\dot\bigcup Z\cong T\dot\bigcup Z$, 则 S 与 T 必须有相同的 G 轨道结构, 所以 $S\cong T$. □

注 由上述引理的证明可见: $[S_1],\cdots,[S_k]$ 是 $\Omega(G)$ 的一组自由 $\mathbb{Z}$ 基.

为了对 $\Omega(G)$ 作进一步讨论, 我们规定几个记号. 令 $H,K\leqslant G$. 如存在元素 $x\in G$ 使得 $x^{-1}Hx=K$, 则称 H 与 K 为 G **共轭**, 记作 $H={}_GK$. 如存在元素 $x\in G$ 使得 $x^{-1}Hx\subseteq K$, 则称 H **子共轭**于 K, 记作 $H\leqslant{}_GK$.

令 $\mathscr{G}=\mathscr{G}(G)$ 为 G 的子群共轭类的一个代表系, 即 G 的任何子群都恰与 $\mathscr{G}$ 中的一个元素共轭. 我们要证:

(*) G 集的集合 $\{G/H|H\in\mathscr{G}\}$ 形成 $\Omega(G)$ 的一个 $\mathbb{Z}$ 基.

我们知道: $\forall H\in\mathscr{G}, G/H$ 是单 G 集, 且每个单 G 集都有形状 G/H, 这里 $H\leqslant G$. 我们也知道: 对于任何单 G 集同构类的代表系 $\{S_1,\cdots,S_k\},\{[S_1],\cdots,[S_k]\}$ 是 $\Omega(G)$ 的一个 $\mathbb{Z}$ 基. 故为了证明 (*), 我们只要证明: 令 $H,K\leqslant G$. 则 G/H 与 G/K 是同构的 G 集当且仅当 $H=_G K$.

$\forall G$ 集 S, 定义 $\mathrm{Inv}_G(S):=\{s\in S|xs=s,\ \forall x\in G\}$.

(5.5.3) 命题 令 $H,K\leqslant G$, S 为 G 集, 则

(a) *存在双射*: $\mathrm{Hom}_G(G/H,S)\leftrightarrow\mathrm{Inv}_H(S)$.

(b) *存在双射*: $\mathrm{Hom}_G(G/H,G/K)\leftrightarrow\mathrm{Inv}_H(G/K)$. *进而*, $\mathrm{Inv}_H(G/K)=\{xK|x\in G,x^{-1}Hx\subseteq K\}$.

(c) *如* $H\nleqslant_G K$, *则* $\mathrm{Inv}_H(G/K)=\varnothing$.

(d) *存在* G *集同构* $G/H\cong G/K$ *当且仅当* $H=_G K$.

证 (a) 每个 $f\in\mathrm{Hom}_G(G/H,S)$ 把 $1\cdot H\in G/H$ 映到一个 H 固定点 $s_0\in S$. 由于

$$f(xH)=xs_0,\qquad\forall x\in G,$$

f 完全由 s_0 所确定. 于是 $f \leftrightarrow s_0$ 给出了从 $\mathrm{Hom}_G(G/H,S)$ 到 $\mathrm{Inv}_H(S)$ 上的双射.

(b) 在 (a) 中取 $S=G/K$. 注意左陪集 xK 为 H 固定的当且仅当 $H\cdot xK=xK$, 即 $x^{-1}Hx\subseteq K$. 这推出 (b).

(c) 这由 (b) 直接推出.

(d) 令 $H=_G K$. 写 $K=xHx^{-1}, x\in G$. 则存在 G 集的同构映射 $\theta: G/K \xrightarrow{\sim} G/H$ 如下:

$$\theta(gK)=\theta(gxHx^{-1})=gxH, \quad \forall g\in G.$$

反之, 设 $G/H\cong G/K$. 则 $\mathrm{Hom}_G(G/H,G/K)\neq\varnothing$. 故由 (c) 知: $H\leqslant_G K$. 于是由 H 与 K 地位的对称性得 $H=_G K$. □

由以上命题的 (d) 与前面的注记可得:

(5.5.4) 推论 *令 $\mathscr{G}$ 为 G 的子群共轭类的一个代表系. 则*

$$\Omega(G)=\bigoplus_{H\in\mathscr{G}}\mathbb{Z}[G/H].$$

今令 $H\leqslant G$, S 与 T 为 G 集, 则关系式

$$\mathrm{Inv}_H(S\biguplus T)=\mathrm{Inv}_H(S)\biguplus \mathrm{Inv}_H(T),$$
$$\mathrm{Inv}_H(S\times T)=\mathrm{Inv}_H(S)\times \mathrm{Inv}_H(T)$$

成立. 由此, 我们可定义映射 $\varphi_H:\Omega(G)\to\mathbb{Z}$ 如下:

$$\varphi_H([S]):=|\mathrm{Inv}_H(S)|, \quad \forall G \text{ 集 } S.$$

易见 φ_H 是有定义的. 由以上关系式知 φ_H 是环同态.

如 $H=_G K$, 则易证 $\varphi_H=\varphi_K$, 事实上, $\forall x\in G$ 与 G 集 S, 我们有

$$s\in \mathrm{Inv}_H(S)\Longleftrightarrow xs\in \mathrm{Inv}_{xHx^{-1}}(S).$$

故由 $H=_G K$ 可推出 $\varphi_H=\varphi_K$. 以后我们还将证明其逆也对, 即由 $\varphi_H=\varphi_K$ 可推出 $H=_G K$.

令 $H\leqslant G$. 在命题 (5.5.3)(b) 中取 $K=H$. 我们有

$$\varphi_H([G/H])=[N_G(H):H], \tag{1}$$

这里 $N_G(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子. 进而, 由命题 (5.5.3) (c) 得:

$$\varphi_H([G/K])\neq 0\Longleftrightarrow H\leqslant_G K. \tag{2}$$

我们将利用等式 (1) 与 (2) 来证明: 从 $\Omega(G)$ 到 $\mathbb{Z}$ 内的环同态集合 $\{\varphi_H | H\in\mathscr{G}(G)\}$ 足以用来分离 $\Omega(G)$ 中的元素.

(5.5.5) 定理 (Burnside)　令 S 与 T 为两个 G 集, $\mathscr{G}$ 为 G 的子群共轭类的一个代表系. 则存在 G 集同构 $S \cong T$ 当且仅当 $\varphi_H([S]) = \varphi_H([T]), \forall H \in \mathscr{G}$.

证　$(\Longrightarrow)$ 显然.

$(\Longleftarrow)$ 设 $\varphi_H([S]) = \varphi_H([T]), \forall H \in \mathscr{G}$. 现要证明: $S \cong T$. 可写

$$[S] = \sum_{H_i \in \mathscr{G}} m_i [G/H_i],$$

$$[T] = \sum_{H_i \in \mathscr{G}} n_i [G/H_i], \quad m_i, n_i \in \mathbb{Z}.$$

我们只需证明 $m_i = n_i, \forall i$. 如这结论不成立, 令

$$\mathscr{G}_0 = \{H_i \in \mathscr{G} | m_i \neq n_i\},$$

则 $\mathscr{G}_0$ 非空. 令 H_0 为 $\mathscr{G}_0$ 中关于偏序 $\leqslant_G$ 的一个极大元. 则由 (2) 式得

$$\varphi_{H_0}([G/H]) = 0, \quad \forall H \in \mathscr{G}_0, H \neq H_0. \tag{3}$$

因为 $\varphi_{H_0}([S]) = \varphi_{H_0}([T])$ 与 $m_i = n_i$, $\forall$ 使 $H_i \in \mathscr{G} - \mathscr{G}_0$ 的 i, 所以

$$\sum_{H_i \in \mathscr{G}_0} m_i \varphi_{H_0}[G/H_i] = \sum_{H_i \in \mathscr{G}_0} n_i \varphi_{H_0}([G/H_i]). \tag{4}$$

由 (3) 式, (4) 式推出 $m_0 \varphi_{H_0}([G/H_0]) = n_0 \varphi_{H_0}([G/H_0])$. 由 (2) 式知 $\varphi_{H_0}([G/H_0]) \neq 0$. 故 $m_0 = n_0$, 这与 $H_0 \in \mathscr{G}_0$ 的假设矛盾. 故 $\mathscr{G}_0$ 必为空集, 即

$$m_i = n_i, \quad \forall H_i \in \mathscr{C}.$$

因此 $S \cong T$. □

本节的余下部分要讨论 G 集与诱导映射的关系. 给定 G 集 S, 令 $F[S]$ 为以 S 中元素为基的 F 空间, 则 $F[S]$ 通过 G 作用的 F 线性扩充提供了 G 的一个置换表示, 即 $F[S]$ 可被当作置换 $F[G]$ 模.

设 $H \leqslant G$. 则任何 G 集 S 都可通过算子限制而被当作 H 集. 记号 $\mathrm{Res}_H^G(S)$ 或 S_H 表明把 S 当作 H 集. 另一方面, 对于每个 H 集 T, 我们定义其诱导 G 集 $\mathrm{Ind}_H^G(T)$ 如下. 在笛卡儿积 $G \times T$ 上定义一个 H 集结构

$$h(g,t) = (gh^{-1}, ht), \quad \forall h \in H, g \in G, t \in T.$$

则 $\overline{(g,t)} = \{(gh^{-1}, ht) | h \in H\}$ 为含 (g,t) 的 H 轨道. 以 $G \times_H T$ 记 $G \times T$ 中 H 轨道的集合. 在 $G \times_H T$ 上可定义如下的 G 集结构:

$$g' \cdot \overline{(g,t)} = \overline{(g'g,t)}, \quad \forall g, g' \in G, t \in T.$$

今定义 $\mathrm{Ind}_H^G(T) := G \times_H T$, 称之为**由 T 诱导的 G 集**. 为简化符号起见, 有时以 T^G 记 $\mathrm{Ind}_H^G(T)$.

依照置换 $F[G]$ 模的观点, 上述关于诱导 G 集的构造法是相当自然的. 由 H 集 T 引起置换 $F[H]$ 模 $F[T]$, 而对应的诱导 $F[G]$ 模则由 $F[G]\otimes_{F[H]} F[T]$ 给出. 显然, 我们有 $F[G]$ 模同构:

$$F[G]\otimes_{F[H]} F[T] \cong F[\mathrm{Ind}_H^G(T)], \quad \forall H \text{ 集 } T.$$

关于集合上的限制与诱导映射的基本性质可归结如下:

(5.5.6) 命题 令 $H \leqslant G$. 则

(a) 限制与诱导映射关于集合的无交并是加性的. 即如 S 与 T 是 G 集, 则 $\mathrm{Res}_H^G(S \biguplus T) = \mathrm{Res}_H^G(S) \biguplus \mathrm{Res}_H^G(T)$. 如 S' 与 T' 是 H 集, 则 $\mathrm{Ind}_H^G(S' \biguplus T') = \mathrm{Ind}_H^G(S') \biguplus \mathrm{Ind}_H^G(T')$.

(b) 设子群 E 满足条件 $H \subseteq E \subseteq G$, 设 S 是 H 集. 则存在 G 集同构: $G \times_E (E \times_H S) \cong G \times_H S$, 即诱导映射满足传递性: 同样, 限制映射也满足传递性: $\mathrm{Res}_H^G(S) = \mathrm{Res}_H^E(\mathrm{Res}_E^G(S))$.

(c) 如 e_H 是由单个元素组成的 H 集, 则存在 G 集同构

$$G \times_H e_H \cong G/H.$$

上述命题的证明留给读者作为练习.

由上述命题知: 存在加法群同态

$$\mathrm{Res}_H^G : \Omega(G) \to \Omega(H),$$
$$\mathrm{Ind}_H^G : \Omega(H) \to \Omega(G),$$

使得 $\forall \sum n_S[S] \in \Omega(G) (n_S \in \mathbb{Z}, S$ 为 G 集), 有

$$\mathrm{Res}_H^G\left(\sum n_S[S]\right) := \sum n_S[\mathrm{Res}_H^G(S)]$$

及 $\forall \sum m_T[T] \in \Omega(H)$ ($m_T \in \mathbb{Z}, T$ 为 H 集), 有

$$\mathrm{Ind}_H^G\left(\sum m_T[T]\right) := \sum m_T[\mathrm{Ind}_H^G(T)].$$

注 事实上, Res_H^G 是环同态, 但 Ind_H^G 一般不是环同态.

以下命题类似于 Frobenius 互反定理.

(5.5.7) 命题 设 $H \leqslant G$, S 是 H 集, T 是 G 集. 则存在集合之间的双射

$$\mathrm{Hom}_G(S^G, T) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_H(S, T_H).$$

证 只要对 S 是单 H 集的情形证明本命题就行了. 可令 $S = H/E$, 这里 $E \leqslant H$, 于是

$S^G = G \times_H (H/E) = G \times_H (H \times_E e_E) \cong G/E$ (作为 G 集同构). 因此由命题 (5.5.3) 知: 存在集合之间的双射

$$\mathrm{Hom}_G(S^G, T) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_G(G/E, T) \leftrightarrow \mathrm{Inv}_E(T),$$
$$\mathrm{Hom}_H(H/E, T_H) \leftrightarrow \mathrm{Inv}_E(T_H).$$

这推出命题的结论. □

下面要叙述的三个定理是 Mackey 的子群定理, 张量积定理与 Frobenius 互反定理在置换表示方面的应用. 其证明的细节留给读者作为练习.

(5.5.8) 定理 (与定理 (5.3.1) 相比较) 设 $H, K \leqslant G$, S 是 H 集. 则存在 K 集同构:

$$(S^G)_K \cong \bigcup_{a \in D}^{\cdot} ({}^aS|_{{}^aH \cap K})^K,$$

这里 D 是 G 的 (K, H) 双陪集在 G 中的一个代表系. $\forall a \in G$, ${}^aS := \{{}^as | s \in S\}$ 为如下定义的 ${}^aH := aHa^{-1}$ 集:

$${}^ah \cdot {}^as = {}^a(h \cdot s), \quad \forall h \in H, s \in S.$$

(5.5.9) 定理 (与定理 (5.3.2) 相比较) 设 $H_i \leqslant G$, S_i 是 H_i 集, $i = 1, 2$. 则存在 G 集同构

$$S_1^G \times S_2^G \cong \bigcup_{\substack{\alpha \\ x^{-1}y \in \alpha}}^{\cdot} (({}^xS_1 \times {}^yS_2)|_{{}^xH_1 \cap {}^yH_2})^G,$$

这里 α 取遍 G 的所有 (H_1, H_2) 双陪集. 对于每一个双陪集 α, 在 G 中任取一对元素 x, y 使 $x^{-1}y \in \alpha$.

(5.5.10) 定理 (与命题 (5.2.1)(c) 相比较) 设 $H \leqslant G$, S 是 H 集, T 是 G 集. 则存在 G 集同构: $S^G \times T \cong (S \times T_H)^G$.

习 题

1. 给出命题 (5.5.6), 定理 (5.5.8), (5.5.9) 与 (5.5.10) 的详细证明.

2. 设 S 与 T 是 G 集, $H, K \leqslant G$, $s \in S, x \in G$.
证明: $s \in \mathrm{Inv}_H(S) \Longleftrightarrow xs \in \mathrm{Inv}_{xHx^{-1}}(S)$.
由此导出: 如 $H =_G K$, 则 $|\mathrm{Inv}_H(S)| = |\mathrm{Inv}_K(S)|$.

3. 设 $H, K \leqslant G$, D 是 G 的 (H, K) 双陪集的集合. 证明: G 集 $(G/H) \times (G/K)$ 的 G 轨道以如下方式确定了一个 (H, K) 双陪集.

$$\overline{(xH, yK)} \mapsto Hx^{-1}yK,$$

这里 $\overline{(xH,yK)}$ 是 $(G/H)\times(G/K)$ 中含 (xH,yK) 的 G 轨道. 证明以上对应给出了 $(G/H)\times(G/K)$ 的 G 轨道集合与 D 之间的一个双射.

提示 令 $G=\dot{\bigcup\limits_a} HaK$, 这里 a 取遍 (H,K) 双陪集在 G 中的一个代表元系. $(G/H)\times(G/K)$ 的对应于 HaK 的 G 轨道由集合 $\{(xH,yK)|x^{-1}y\in HaK\}$ 中的所有互异元组成. (H,aK) 在 G 中的稳定子恒等于 $H\bigcap aKa^{-1}$. 由此导出 $(G/H)\times(G/K)$ 的对应于 HaK 的 G 轨道与 $G/(H\bigcap aKa^{-1})$ 是 G 集同构. 于是我们有 G 集同构: $(G/H)\times(G/K)\cong\dot{\bigcup\limits_a} G/(H\bigcap aKa^{-1})$. 将这结果与定理 (5.3.2) 相比较.

4. 令 $\mathscr{G}=\{H_1,\cdots,H_m\}$ 为 G 的子群共轭类的一个代表系. 定义映射 $\varphi:\Omega(G)\to\mathbb{Z}^{(m)}$ 如下:

$$\varphi([S])=(\varphi_{H_1}([S]),\cdots,\varphi_{H_m}([S])),\forall G \text{ 集 } S.$$

证明 φ 是环的单同态.

5. 设 $H\leqslant G$. 记号 $\mathscr{G}$ 如习题 4 所定义. 令

$$H^*=\left(\frac{\varphi_{H_1}[G/H]}{\varphi_H[G/H]},\cdots,\frac{\varphi_{H_m}[G/H]}{\varphi_H[G/H]}\right).$$

证明: (a) $H^*\in\mathbb{Z}^{(m)}$.

(b) $\{H^*|H\in\mathscr{C}\}$ 形成 $\mathbb{Z}^{(m)}$ 的自由 $\mathbb{Z}$ 基.

6. 令映射 φ 如习题 4 所定义. 证明: $\forall n\in\mathbb{Z}$,

$$n\cdot\mathbb{Z}^{(m)}\subseteq\varphi(\Omega(G))\iff n\equiv 0(\mathrm{mod}|G|).$$

7. 设 $H\leqslant G$. 证明: 存在满足如下条件的元素 $x\in\Omega(G)$:

$$\varphi_H(x)\neq 0,\quad \varphi_K(x)=0,\quad \forall K\leqslant G, K\neq_G H.$$

提示 利用习题 4 的记号. 设 $H=H_i$. 令 ε_i 为 $\mathbb{Z}^{(m)}$ 中的元素, 它的第 i 个分量等于 1, 其余分量都等于 0. 利用习题 6 的结果证明存在某元素 $x\in\Omega(G)$ 使得 $|G|\varepsilon_i=\varphi(x)$. 于是 x 即满足所要求的条件.

第六章 诱导表示的分解

诱导表示及其特征标的分解是构造有限群的不可约表示的最有效的方法之一. 关于分解由正规子群诱导的表示的主要结果应归功于 Frobenius, Clifford 和 Gallagher 的工作, 而 Curtis-Fossum, Ree 与 Higman 在分解由任意子群诱导的表示方面做了大量工作.

§6.1 由正规子群诱导的表示的分解

关于这方面最基本的结果是 Clifford 定理. 该定理的部分结果已在 § 3.1 以群表示的语言作为子群表示的完全可约性判则被证明过. 现在我们先以模的语言来叙述并证明 Clifford 定理, 接着讨论它的特征标形式. 然后用它来研究由正规子群诱导的表示的分解. 最后, 作为一种应用, 我们用小群法来描述某族特殊群的不可约特征标.

(6.1.1) 定理 (Clifford) 设 F 是任意域, $H \lhd G$. 记 $A = F[G]$ 与 $B = F[H]$. 令 M 为不可约 A 模, L 为 ${}_BM$ 的不可约 B 子模. 则以下结果成立:

(a) ${}_BM$ 是完全可约的, 它是 L 的共轭 B 模的直和 (注: 把 L 看作 H 的表示, 则 L 的共轭 B 模对应于 L 的共轭表示).

(b) ${}_BM$ 的对应于不可约 B 模的齐次分支被 G 可迁地置换.

(c) 令 $\widetilde{L}$ 为 ${}_BM$ 的 L 齐次分支. 记 $\widetilde{H} = \{x \in G | x\widetilde{L} = \widetilde{L}\}$. 令 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 为 G 的 $\widetilde{H}$ 左陪集代表系, 则 $\{g_iL | 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 L 的非同构的共轭 B 模的完

全集, 它们在 ${}_BM$ 中以相同的重数 (记该重数为 e) 出现, 即存在 B 模同构

$$ {}_BM \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n} g_iL\right)^{(e)}. $$

(d) 设 $\widetilde{L}$ 与 $\widetilde{H}$ 如 (c) 中所定义. 则 $\widetilde{L}$ 是 $F[\widetilde{H}]$ 模, 且存在 A 模同构 $M \cong \widetilde{L}^G$.

证 定理 (3.1.3) 的证明实际上已证明了 (a) 与 (b). 现只要证明 (c) 与 (d). 由 (b) 知 ${}_BM$ 的齐次分支在 G 的作用下可迁. 故由 $\widetilde{L}$ 与 $\widetilde{H}$ 的定义知: 存在 $\widetilde{L}$ 的 G 轨道与 G 的 $\widetilde{H}$ 左陪集代表系 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 之间的自然双射. 我们有

$$ {}_BM = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i\widetilde{L}. \tag{1} $$

由 (b) 易知: L 的每个共轭 B 模同构于某 $g_iL, 1 \leqslant i \leqslant n$. 最后, 因 $M = g_iM$, 故 g_iL 在 $g_i\widetilde{L}$ 中的重数等于 L 在 $\widetilde{L}$ 中的重数. 这证明了 (c).

据 $\widetilde{L}$ 与 $\widetilde{H}$ 的定义知: (1) 式可改写为

$$ {}_CM = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i\widetilde{L}, $$

这里 $C = F[\widetilde{H}]$. 因 $\widetilde{L}$ 是 ${}_CM$ 的 C 子模, 故 (d) 可从诱导模的定义推出. □

上述结果把每个不可约 $F[G]$ 模 M 表为 $\widetilde{H}$ 诱导模, 这里 $H \leqslant \widetilde{H} \leqslant G$ 与 $H \lhd G$. 故除非 $\widetilde{H} = G$, 确定不可约 $F[G]$ 模的问题可归结为关于 G 的真子群的相应问题. 于是我们将面临两个问题: 首先, 找出在什么情况下, $\widetilde{H}$ 是 G 的真子群? 其次, 当 $\widetilde{H} = G$ 的情况不能避免时, 我们能做些什么? 当 F 是 G 的分裂域时, 这第二个问题将导致把由 M 所决定的表示分解为射影表示的张量积.

现设 $F \subseteq \mathbb{C}$ 是 G 及其所有子群的分裂域. 设 $H \lhd G, \psi$ 是 $(\rho, V) \in R_F(H)^+$ 的特征标. 则 V 可被当作 $F[H]$ 模. 惯性群 $T(\rho)$ 可表为

$$ T(\rho) = T(\psi) = \{x \in G | {}^x\psi = \psi\} = \{x \in G | {}^xV \cong V\}. $$

故 $T(\psi)$ 也称为 ψ 的**惯性群**.

于是, Clifford 定理的特征标形式如下:

(6.1.2) 命题 (a) 令 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G, H \lhd G$. 则 $\zeta_H = e(\sum {}^x\psi)$, 这里 e 是某正整数, $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$, ${}^x\psi$ 取遍 ψ 的 G 共轭.

(b) 令 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$. 对于使 $(\zeta, \psi^G) > 0$ 的 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$, 存在 $\eta \in \mathrm{Irr}_F T(\psi)$ 使满足

$$ \eta_H = r\psi \quad 与 \quad \zeta = \eta^G, $$

这里 $r \in \mathbb{N}$.

证 (a) 可从定理 (6.1.1)(c) 直接推出.

(b) 由定理 (5.2.4) 知: $(\zeta_H, \psi) = (\zeta, \psi^G) > 0$. 令 M 为对应于 ζ 的 $F[G]$ 模. 记 $B = F[H]$. 则 $_BM$ 中存在对应于 ψ 的不可约 B 子模 L. 令 $\widetilde{L}$ 为 $_BM$ 的 L 齐次分支. 则 $\widetilde{L}$ 是 $F[T(\psi)]$ 模. 令 η 为 $T(\psi)$ 的对应于 $\widetilde{L}$ 的 F 表示的特征标. 则因 $_B\widetilde{L}$ 的所有不可约分量都 B 模同构于 L, 我们有 $\eta_H = r\psi$, 这里 $r \in \mathbb{N}$. 进而, 由定理 (6.1.1)(d) 得 $\zeta = \eta^G$. 最后, 由 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$ 推出 $\eta \in \mathrm{Irr}_F T(\psi)$. □

(6.1.3) 定理 设 $H \lhd G, \psi \in \mathrm{Irr}_F H$. 令 $T = T(\psi)$ 为 ψ 的惯性群. 设对于某 $\psi_1 \in \mathrm{ch}_F^+(T)$, 有 $\psi = (\psi_1)_H$, 即 ψ 可扩充为 T 的特征标 ψ_1. 则

(a) $\psi_1 \in \mathrm{Irr}_F T$.

(b) 每个 $\omega \in \mathrm{Irr}_F T/H$ 能被看作 $\mathrm{Irr}_F T$ 的元素, 且对于每个这样的 ω, 有 $(\omega\psi_1)^G \in \mathrm{Irr}_F G$.

(c) ψ^G 可用下式表成相异不可约特征标的整线性组合:

$$\psi^G = \sum_\omega \omega(\mathbf{1})(\omega\psi_1)^G,$$

这里和式中的 ω 取遍 $\mathrm{Irr}_F T/H$.

证 (a) 显然.

(b) 由条件 $H \lhd T$ 知 ψ^T 在 $T - H$ 上取零值, 而它在 H 上等于 $[T:H]\psi$. 另一方面,

$$\sum_\omega \omega(\mathbf{1})(\omega\psi_1) = \left(\sum_\omega \omega(\mathbf{1})\omega\right)\psi_1,$$

且 $\sum_\omega \omega(\mathbf{1})\omega$ 是 T/H 的正则特征标, 它作为 T 的特征标在 $T - H$ 上取零值, 而在 H 上取值 $[T:H]$. 这推出

$$\psi^T = \sum_\omega \omega(\mathbf{1})(\omega\psi_1).$$

因此由诱导表示的传递性导出 (c) 中的等式.

由假设 $H \lhd G$ 与定理 (5.3.1)(a) 知

$$(\psi^G, \psi^G) = \sum_{xH \in G/H} (\psi, {}^x\psi)_H = [T:H]. \tag{2}$$

$$另一方面, (\psi^G, \psi^G) = \sum_{\omega,\omega'} \omega(1)\omega'(1)((\omega\psi_1)^G, (\omega'\psi_1)^G)$$
$$= \sum_{\omega} \omega(1)^2((\omega\psi_1)^G, (\omega\psi_1)^G)$$
$$+ \sum_{\omega\neq\omega'} \omega(1)\omega'(1)((\omega\psi_1)^G, (\omega'\psi_1)^G)$$
$$\geqslant \sum_{\omega} \omega(1)^2((\omega\psi_1)^G, (\omega\psi_1)^G)$$
$$\geqslant \sum_{\omega} \omega(1)^2$$
$$= [T:H]. \tag{3}$$

由 (2) 式与 (3) 式推出

$$((\omega\psi_1)^G, (\omega'\psi_1)^G) = \begin{cases} 1, & 如\quad \omega = \omega', \\ 0, & 如\quad \omega \neq \omega'. \end{cases}$$

故 $\{(\omega\psi_1)^G | \omega \in \mathrm{Irr}_F T/H\}$ 是 G 的互异的不可约特征标集合. □

上述定理的一个特殊情形是 $G = T(\psi)$. 此时我们有以下结果.

(6.1.4) 推论 设 $H \lhd G, \psi \in \mathrm{Irr}_F H$ 满足 $G = T(\psi)$. 如 ψ 能扩充为 G 的特征标 ψ_1, 即 $(\psi_1)_H = \psi$, 则 ψ^G 的每个不可约分量 ζ 有形状 $\zeta = \omega\psi_1$, 这里 $\omega \in \mathrm{Irr}_F G/H$ 被 ζ 所唯一确定.

借助于上面的结果, 我们能用其真子群的特征标来描述某族特殊群的所有不可约特征标. 我们所要介绍的方法称为**小群法**.

(6.1.5) 命题 设 $G = H \rtimes K$ 是阿贝尔正规子群 H 与子群 K 的半直积. 则以下结果成立:

(a) $\forall \zeta \in \mathrm{Irr}_F G$, 存在 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$ 使得 $(\zeta, \psi^G) > 0$.

(b) 每个 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$ 能被扩充为 $T_G(\psi)$ 的特征标 ψ_1. 进而, 我们有

$$T_G(\psi) = HT_K(\psi),$$
$$\psi^G = \sum_{\omega \in \mathrm{Irr}_F T_K(\psi)} \omega(1)(\omega\psi_1)^G,$$

这里 $T_G(\psi)$ 是 ψ 在 G 中的惯性群, $T_K(\psi) = T_G(\psi) \bigcap K$.

(c) 每个 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$ 有形状 $\zeta = (\omega\psi_1)^G$, 这里 ω 与 ψ_1 如 (b) 中所定义. 设另有 $\psi' \in \mathrm{Irr}_F H, \psi'_1 \in \mathrm{Irr}_F T_G(\psi')$ 使 $(\psi'_1)_H = \psi'$ 与 $\omega' \in \mathrm{Irr}_F T_K(\psi')$. 则 $(\omega\psi_1)^G = (\omega'\psi'_1)^G$ 当且仅当 $\omega = \omega'$ 且存在某 $g \in G$ 使 $\psi' = {}^g\psi$.

证 (a) 可取 ψ 为 ζ_H 的不可约分量, 然后应用定理 (5.2.4).

(b) 令 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$. 因 H 是阿贝尔群, 所以 ψ 是线性特征标. 显然, $T_G(\psi) = HT_K(\psi)$. 定义 $T_G(\psi)$ 上函数 ψ_1 使

$$\psi_1(ab) = \psi(a), \quad \forall a \in H, b \in T_K(\psi).$$

则 ψ_1 是 ψ 的扩充. 我们有: $\forall a, a' \in H, b, b' \in T_K(\psi)$,

$$\begin{aligned}\psi_1((ab)(a'b')) &= \psi_1((a \cdot ba'b^{-1})(bb')) = \psi(a \cdot ba'b^{-1}) \\ &= \psi(a)({}^b\psi)(a') = \psi(a)\psi(a') \\ &= \psi_1(ab)\psi_1(a'b').\end{aligned}$$

这推出 ψ_1 是 $T_G(\psi)$ 的线性特征标. 因此 (b) 可从定理 (6.1.3) 推出.

(c) 第一个结论可从 (a) 与 (b) 直接推出. 余下只要证: 如 $(\omega\psi_1)^G = (\omega'\psi_1')^G$, 则 $\omega = \omega'$ 且存在某 $g \in G$ 使 $\psi' = {}^g\psi$.

首先, $(\omega\psi_1)^G$ 在 H 上的限制是 ψ 的一些共轭特征标的和 (注: 如二个特征标所对应的表示互为共轭表示, 则称这两个特征标为共轭的). 故 $(\omega\psi_1)^G$ 在共轭的意义下确定了 ψ. 其次, 令 V 为对应于特征标 $(\omega\psi_1)^G$ 的 $F[G]$ 模. 令 W 为 ${}_{F[H]}V$ 的对应于特征标 ψ 的 $F[H]$ 子模, 则 W 在 $T_K(\psi)$ 的作用下稳定. 易见 $T_K(\psi)$ 的由 W 所提供的特征标等于 ω. 故 $(\omega\psi_1)^G$ 也确定了 ω. □

习 题

本节习题中的 F 为 G 及其子群的分裂域.

1. 设 $H \lhd G, \psi \in \mathrm{Irr}_F H$, $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$. 设 $(\zeta, \psi^G) > 0$. 由命题 (6.1.2) 知存在 $\eta \in \mathrm{Irr}_F T(\psi)$ 使 $\zeta = \eta^G$ 与 $\eta_H = r\psi$, 这里 $r \in \mathbb{N}$. 证明: η 被这些条件所唯一确定.

2. 设 $N \lhd G, \mathscr{I} \in \mathrm{Irr}_F N$. 证明:

$$\mathscr{I}^G \in \mathrm{Irr}_F G \Leftrightarrow T(\mathscr{I}) = N.$$

3. 设 $N \lhd G$, G/N 是阿贝尔群. 设 C 是 G/N 的由线性特征标组成的群. 则 C 通过乘法作用于 $\mathrm{Irr}_F G$ (注: 通过特征标的提升可把 C 看作 $\mathrm{Irr}_F G$ 的子集). 令 $\varphi \in \mathrm{Irr}_F N$. 证明:

$$\varphi^G = f \cdot \sum_{i=1}^{s} \chi_i,$$

这里 $f \in \mathbb{N}, \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$ 是 $\mathrm{Irr}_F G$ 的一个 C 轨道.

提示 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. 则 $(\chi_N)^G = \rho\chi$, 这里 ρ 是 G/N 的正则特征标.

4. 设 $N \lhd G$, $\chi \in \mathrm{Irr}_F G, \mathscr{I} \in \mathrm{Irr}_F N$ 使得 $(\chi_N, \mathscr{I}) \neq 0$. 证明下列条件等价:

(a) $\chi_N = e\mathscr{I}, e^2 = [G:N]$.

(b) χ 在 $G - N$ 上取零值, $T(\mathscr{I}) = G$.

(c) χ 是 $\mathscr{I}^G$ 的唯一不可约分量, $T(\mathscr{I})=G$.

注 当上述等价条件被满足时, 称 χ 与 $\mathscr{I}$ 关于 G/N 全交绪.

5. (Ito) 设 A 是 G 的阿贝尔子群. 则 $\deg\chi\leqslant[G:A]$, $\forall\chi\in\mathrm{Irr}_FG$. 此时, 如果 $A\lhd G$, 则 $\deg\chi|[G:A]$.

6. 设 $H\lhd G$, $\theta\in\mathrm{Irr}_FG$. 则存在 $\psi\in\mathrm{Irr}_FH$ 使 $\theta=\psi^G$ 当且仅当 θ 在 $G-H$ 上取零值且 θ_H 是 H 的相异不可约特征标的和.

提示 ($\Longleftarrow$) 令 θ 在 $G-H$ 上取零值, $\theta_H=\psi_1+\cdots+\psi_r$, 这里 $\{\psi_i\}$ 是相异不可约特征标使 $\deg\psi_1\leqslant\deg\psi_i$, $\forall i>1$. 则 $\deg\theta\geqslant r\deg\psi_1$. 但 ψ_1^G 含有分量 θ. 故 $[G:H]\deg\psi_1\geqslant\deg\theta$. 最后, 通过计算 (θ,θ) 知 $[G:H]=r$, 故 $\psi_1^G=\theta$. 这也证明了所有 ψ_i 有相同的次数.

($\Longrightarrow$) 令 $\theta=\psi^G$, 这里 $\psi\in\mathrm{Irr}_FH$. 显然 θ 在 $G-H$ 上取零值. 由定理 (5.2.4) 得 $(\theta_H,\psi)=1$. 然后运用定理 (6.1.1).

7. 设 $N\lhd G$, $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 使 $\chi_N=\mathscr{I}\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}N$. 令 $\psi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 定义 G/N 上函数 η 如下:

$$\eta(gN)=\frac{1}{|N|}\sum_{x\in gN}\psi(x)\overline{\chi(x)}.$$

(a) 如 $(\psi_N,\mathscr{I})\neq0$, 则 $\eta\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G/N$.

(b) 如 $(\psi_N,\mathscr{I})=0$, 则 $\eta=0$.

(c) 如 $\chi=\psi$, 则 $\eta=1_{G/N}$.

8. 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的如下置换称为 n 次变号置换:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \pm i_1 & \pm i_2 & \cdots & \pm i_n\end{pmatrix},\quad 1\leqslant i_j\leqslant n.$$

令 $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \pm i_1 & \pm i_2 & \pm i_3\end{pmatrix}\middle| 1\leqslant i_j\leqslant 3\right\}$ 为三次变号置换群.

证明: (a) $|G|$=48.

(b) 令 $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \pm1 & \pm2 & \pm3\end{pmatrix}\right\}$. 则 H 是 G 的正规阿贝尔子群.

(c) $G=H\rtimes S$, 这里 $S=S_3$ 是集合 $\{1,2,3\}$ 上的对称群.

(d) 找出 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 特别要找出每个 $\zeta\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 的次数, 并把 ζ 表为形状 $(\widetilde{\psi}\omega)^G$, 这里 $\psi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$. $\widetilde{\psi}$ 为 ψ 到 $T_G(\psi)$ 的扩充, $\omega\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(T_G(\psi)/H)$.

提示 先证明 H 的非共轭特征标 ψ 能用记号 $(+++),(++-),(+--)$ 与 $(---)$ 来描述 (依 ψ 在 H 的一个生成元上取 1 或 −1 而定). 证明: 对于 ψ 的这四种选择, $T_G(\psi)/H$ 分别有结构 S_3, $S_2\times S_1$, $S_1\times S_2$ 与 S_3. 然后运用小群法.

注 同样方法可应用于计算 n 次变号置换群的不可约特征标.

9. 如任何 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 都不是 G 的真子群的特征标的诱导特征标, 则称 G 为 PC 群. 令 G 为 PC 群, $N\lhd G$. 证明:

(a) 如 N 是阿贝尔群, 则 $N\subseteq Z(G)$.

(b) $[G,N]=N^{(1)}$, 这里 $[G,N]$ 是由换位子集合 $\{[g,n]|g\in G, n\in N\}$ 所生成的群. $N^{(i)}$ 是 N 的 i 阶导群, $\forall i$.

(c) $N^{(1)}=N^{(2)}$.

(d) $Z(N)=N\bigcap Z(G)$.

§6.2　一般诱导表示的分解 (Hecke 代数)

在上一节里, 讨论了由正规子群诱导的表示的分解问题, 在本节, 考虑更一般的情形, 即由任意子群诱导的表示的分解问题. 为了得到较强的结果, 设 $F\subseteq\mathbb{C}$ 且 F 是 G 及其所有子群的分裂域. 特别注意由子群的线性特征标诱导的特征标, 尤其是 G 的可迁置换表示的分解. 本节的主要结果归功于 Curtis-Fossum 与 Ree 的工作.

前面已指出过: 群 G 的特征标总可被看作为群代数 $F[G]$ 的特征标在 G 上的限制. 记号 $\mathrm{Irr}_F G$ 既被当作 G 的不可约 F 表示的特征标集合, 也被当作不可约 $F[G]$ 模的特征标集合.

将群代数 $F[G]$ 的元素看作 G 上 F 值函数有时是很方便的: 元素 $\sum\limits_{x\in G}\alpha_x x\in F[G]$ 对应于如下定义的函数 $f:G\to F$

$$f(x)=\alpha_x,\quad \forall x\in G,$$

这里 $\alpha_x\in F$, $\forall x\in G$. 此时 $F[G]$ 的元素之积对应于相应函数的卷积: 如 $f,g: G\to F$ 是 G 上二个 F 值函数, 则卷积 $f\cdot g:G\to F$ 定义为

$$(f\cdot g)(x):=\sum_{y\in G}f(xy)g(y^{-1}),\quad \forall x\in G.$$

于是 G 上 F 值函数组成的 F 空间以卷积为乘法形成一个同构于 $F[G]$ 的 F 代数.

(6.2.1) 命题　*设 $H\leqslant G$, $e\in F[H]$ 是幂等元. 设左理想 $F[H]e$ 提供 H 的 F 特征标 ψ. 则 $F[G]e$ 提供 G 的诱导特征标 ψ^G. 进而, 如 $\zeta\in\mathrm{Irr}_F G$, 则*

$$(\zeta,\psi^G)=\zeta(e)=\dim_F eM,$$

这里 M 是以 ζ 为特征标的 $F[G]$ 模.

证　因 $F[G]$ 是自由右 $F[H]$ 模, 所以存在左 $F[G]$ 模同构

$$F[G]e=F[G]\cdot F[H]e\cong F[G]\otimes_{F[H]}F[H]e.$$

因此 $F[G]e$ 提供诱导特征标 ψ^G.

另一方面, 由于 e 是幂等元, 有

$$\zeta(e) = \mathrm{tr}.(e, M) = \dim_F eM,$$

这里 tr. (e, M) 是 e 作用在 M 上的迹. 易证映射 $em \longmapsto f_{em}$ 给出 F 线性同构 $eM \widetilde{\rightarrow} \mathrm{Hom}_{F[G]}(F(G)e, M)$, 这里

$$f_{em}(ae) := aem, \quad \forall a \in F[G], m \in M.$$

由表示的完全可约性知

$$\dim_F(\mathrm{Hom}_{F[G]}(F[G]e, M)) = (\zeta, \psi^G).$$

故命题得证. □

设 e 是 $F[G]$ 的幂等元. 则 F 代数 $eF[G]e$ 以 e 为恒等元. $eF[G]e$ 反同构于 $\mathrm{End}_{F[G]}F[G]e$, 这里 $\mathrm{End}_{F[G]}F[G]e$ 的元素左作用于 $F[G]e$. 由于 $F[G]$ 是半单的, 代数 $eF[G]e$ 也是半单的 (易证 Rad. $(eF[G]e) = e\mathrm{Rad}.(F[G])e$, 然后应用定理 (1.6.4)).

(6.2.2) 定义 设 $H \leqslant G$. 对于某幂等元 $e \in F[H]$, 令 ψ 为由 $F[H]e$ 所提供的 F 特征标. 记 F 代数 $eF[G]e$ 为 $\mathscr{H}(G, H, \psi)$, 称之为 **Hecke 代数**. 在不致引起混淆的情况下, 我们以 $\mathscr{H}$ 记 $\mathscr{H}(G, H, \psi)$. 显然, e 是 $\mathscr{H}$ 的恒等元.

在本节的余下部分, 我们总假设 $H \leqslant G, e \in F[H]$ 为幂等元使 $F[H]e$ 提供 H 的 F 特征标 ψ 及 $\mathscr{H} = eF[G]e$.

设 ε 是半单 F 代数 A 的非零幂等元. 如 $A\varepsilon$ 是不可约 A 模, 则称 ε 在 A 中本原, 或称 ε 为 A 的**本原幂等元**.

(6.2.3) 引理 设 u 是 $\mathscr{H}$ 的幂等元. 则
u 在 $\mathscr{H}$ 中本原 $\Longleftrightarrow u$ 在 $F[G]$ 中本原.

证 因 $u \in \mathscr{H}$, 而 e 是 $\mathscr{H}$ 的恒等元, 我们有 $eu = ue = u$. 故

$$uF[G]u = ueF[G]eu = u\mathscr{H}u. \tag{1}$$

这推出
u 在 $F[G]$ 中本原 $\Leftrightarrow F[G]u$ 是不可约 $F[G]$ 模.
$\Leftrightarrow uF[G]u \cong (\mathrm{End}_{F[G]}F[G]u)^{\mathrm{op}}$ 是可除环.
$\Leftrightarrow u\mathscr{H}u$ 是可除环.
$\Leftrightarrow \mathscr{H}u$ 是不可约 $\mathscr{H}$ 模.
$\Leftrightarrow u$ 在 $\mathscr{H}$ 中本原. □

设 A 是 F 代数, M 是不可约 A 模. 如对于任何扩域 E/F, M^E 是不可约 A^E 模, 则称 M 为**绝对不可约 A 模**. 如所有不可约 A 模都是绝对不可约的, 则称 F 为 A 的**分裂域**.

(6.2.4) 推论 F 是 $\mathscr{H}$ 的分裂域.

证 必须证明: 每个不可约 $\mathscr{H}$ 模是绝对不可约的. 由定理 (3.2.3) 知只要证明: 对于每个本原幂等元 $u \in \mathscr{H}$, 等式 $u\mathscr{H}u = Fu$ 成立. 因为 F 是 $F[G]$ 的分裂域, 所以由引理 (6.2.3) 知: 对于每个本原幂等元 $u \in \mathscr{H}$, 有等式 $uF[G]u = Fu$. 因此我们的结论可从 (1) 式推出. □

(6.2.5) 定理 如上, $\mathscr{H}$ 是由 G, H, e 与 ψ 所决定的 Hecke 代数. 则下述结果成立:

(a) 令 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$. 则 $\zeta_{\mathscr{H}} \neq 0 \Longleftrightarrow (\zeta, \psi^G) \neq 0$.

(b) 映射 $\zeta \longmapsto \zeta_{\mathscr{H}}$ 是从集合 $\{\zeta \in \mathrm{Irr}_F G | (\zeta, \psi^G) \neq 0\}$ 到集合 $\mathrm{Irr}_F \mathscr{H}$ 上的双射, 这里 $\mathrm{Irr}_F \mathscr{H}$ 是半单 F 代数 $\mathscr{H}$ 的不可约特征标集合.

(c) 如 φ 是 $\mathscr{H}$ 的在 (b) 的映射下对应于 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$ 的不可约特征标, 则 $\deg \varphi = (\zeta, \psi^G)$.

证 (a) 设 M 是特征标为 ζ 的不可约 $F[G]$ 模. 设 $\zeta_{\mathscr{H}} \neq 0$. 则存在某 $a \in F[G]$ 使 $\zeta(eae) \neq 0$. 于是 $eM \neq 0$, 由命题 (6.2.1) 知: $(\zeta, \psi^G) \neq 0$. 反之, 如 $(\zeta, \psi^G) \neq 0$. 则由命题 (6.2.1) 知: $\zeta(e) \neq 0$, 因此 $\zeta_{\mathscr{H}} \neq 0$.

(b) 首先令 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$. 设 $\zeta_{\mathscr{H}} \neq 0$. 并设 M 是特征标为 ζ 的不可约 $F[G]$ 模. 则由 (a) 的证明知: $eM \neq 0$. 因 $\mathscr{H} = eF[G]e$, 故 eM 是 $\mathscr{H}$ 模. 如 $m \neq 0$ 与 $m \in eM$, 则由于 M 是不可约 $F[G]$ 模, 有 $\mathscr{H}m = eF[G]m = eM$. 这证明了 eM 是不可约 $\mathscr{H}$ 模. 现在来计算 eM 的特征标. $\forall x \in \mathscr{H}$, 有 $xM \subseteq eM$. 因此

$$\zeta(x) = \mathrm{tr.}(x, M) = \mathrm{tr.}(x, eM).$$

这推出 $\zeta_{\mathscr{H}}$ 是不可约 $\mathscr{H}$ 模 eM 的特征标.

其次, 我们要证明映射 $\zeta \longmapsto \zeta_{\mathscr{H}}$ 是满射. 令 φ 为不可约 $\mathscr{H}$ 模的特征标. 则存在 $\mathscr{H}$ 的本原幂等元 u, 其在 $\mathscr{H}$ 中生成特征标为 φ 的不可约 $\mathscr{H}$ 模 $\mathscr{H}u$. 据引理 (6.2.3), u 在 $F[G]$ 中本原. 因此 $F[G]u$ 是特征标为某 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F G$ 的不可约 $F[G]$ 模. 由前面的证明知: $\zeta_{\mathscr{H}}$ 是不可约 $\mathscr{H}$ 模 $eF[G]u = \mathscr{H}u$ 的特征标, 即 $\zeta_{\mathscr{H}} = \varphi$.

最后, 设 $\zeta, \zeta' \in \mathrm{Irr}_F G$ 满足 $\zeta_{\mathscr{H}} = \zeta'_{\mathscr{H}} \neq 0$, 据上面的论证知: $\varphi = \zeta_{\mathscr{H}} \in \mathrm{Irr}_F \mathscr{H}$, 且存在 $\mathscr{H}$ 中本原幂等元 u 使不可约 $F[G]$ 模 $F[G]u$ 的特征标 $\zeta'' \in \mathrm{Irr}_F G$ 满足 $\zeta''_{\mathscr{H}} = \varphi$. 令 M 为特征标等于 ζ 的不可约 $F[G]$ 模. 则 $\zeta(u) = \varphi(u) \neq 0$. 因此 $uM \neq 0$. 这推出 $F[G]u \cong M$. 同理可证 $F[G]u \cong M'$, 这里 M'

的特征标为 ζ', 所以 $\zeta' = \zeta$.

(c) $\forall \zeta \in \mathrm{Irr}_F G$, 记 $\varphi = \zeta_{\mathscr{H}}$. 由 (a) 知: 如 M 是特征标为 ζ 的不可约 $F[G]$ 模, 则 φ 为 $\mathscr{H}$ 模 eM 的特征标. 于是由命题 (6.2.1) 推出

$$\deg \varphi = \varphi(e) = \zeta(e) = \dim_F eM = (\zeta, \psi^G).$$ □

设 A 是半单 F 代数, ε 是属于 A 的中心的非零幂等元. 如 $A\varepsilon$ 是正则模 $_AA$ 的齐次分支, 则称 ε 为 A 的**中心本原幂等元**. 注意中心本原幂等元一般不是本原幂等元.

设 $\mathrm{Irr}_F G = \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$. 令

$$e_i = \frac{\chi_i(\mathbf{1})}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g.$$

则由定理 (4.2.1) 知: e_i 是 $F[G]$ 的对应于 χ_i 的中心本原幂等元.

(6.2.6) 推论 *设 $I = \{i | 1 \leqslant i \leqslant s, (\chi_i, \psi^G) \neq 0\}$. 则 $\{ee_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathscr{H}$ 的中心幂等元集合.*

证 我们知道: $F[G]$ 的元素 u 是中心本原幂等元当且仅当存在某不可约 $F[G]$ 模 V 使 u 作为恒等算子作用于 V, 而作为零算子作用于所有其它不同构于 V 的不可约 $F[G]$ 模. 由定理 (6.2.5) 知: 每个不可约 $\mathscr{H}$ 模有形状 eM, 这里 M 是特征标为 $\chi_i \in \mathrm{Irr}_F G$ 的不可约 $F[G]$ 模使得 $(\chi_i, \psi^G) \neq 0$. 显然, ee_i 是 eM 上的恒等算子, 同时也是所有不同构于 eM 的不可约 $\mathscr{H}$ 模上的零算子. 这证明了本推论. □

(6.2.7) 推论 (Janusz) *设 $\chi_i \in \mathrm{Irr}_F G$ 满足 $(\chi_i, \psi^G) = 1$. 则 ee_i 是 $F[G]$ 的本原幂等元使得 χ_i 是 $F[G]ee_i$ 的特征标.*

证 由推论 (6.2.6) 与命题 (6.2.5)(c) 知: ee_i 是 $\mathscr{H}$ 的对应于线性特征标的中心本原幂等元. 于是 ee_i 是 $\mathscr{H}$ 的本原幂等元. 故由引理 (6.2.3) 知: ee_i 也在 $F[G]$ 中本原. 由定理 (6.2.5) 推出: χ_i 是 $F[G]ee_i$ 的特征标. □

(6.2.8) 定理 (Ree) *沿用定理 (6.2.5) 的记号. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$ 满足 $(\psi^G, \chi) \neq 0$. 给定 $t \in G$, 令 $\mathscr{C}$ 为含 t 的共轭类. $K = \sum_{x \in \mathscr{C}} x$, 则*

$$\chi(t) = |C_G(t)| \chi(eKe) \left(\sum_{x \in G} \chi(ex^{-1}e) \chi(exe) \right)^{-1}.$$

证 设 $\mathbf{M}$ 是 G 的特征标为 χ 的矩阵表示. 由于 $K \in Z(F[G])$, 我们有 $\mathbf{M}(K) = \omega \mathbf{I}$. 在两边取迹得

$$\omega = |\mathscr{C}| \chi(t) \chi(\mathbf{1})^{-1}.$$

因 $eKe=Ke$, 故

$$\mathbf{M}(eKe)=\mathbf{M}(K)\mathbf{M}(e)=\omega\mathbf{M}(e).$$

再在两边取迹得

$$\chi(eKe)=\omega\chi(e)=|\mathscr{C}|\chi(t)\chi(e)\chi(\mathbf{1})^{-1}. \tag{2}$$

令

$$\varepsilon=\frac{\chi(\mathbf{1})}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(x^{-1})x.$$

它是 $F[G]$ 中对应于 χ 的中心本原幂等元. 则

$$\varepsilon e=\frac{\chi(\mathbf{1})}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(x^{-1})exe.$$

写 $e=\sum_{h\in H}\alpha_h h$, 这里 $\alpha_h\in F$. 由于 $e^2=e$, 我们有

$$\varepsilon e=\frac{\chi(\mathbf{1})}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{h,k\in H}\chi(x^{-1})\alpha_h\alpha_k ehxke.$$

置 $y=hxk$. 则有 $x^{-1}=ky^{-1}h$ 与

$$\varepsilon e=\frac{\chi(\mathbf{1})}{|G|}\sum_{y\in G}\chi\left(\sum_{h,k\in H}\alpha_h\alpha_k ky^{-1}h\right)eye.$$

于是

$$\varepsilon e=\frac{\chi(\mathbf{1})}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(ex^{-1}e)exe. \tag{3}$$

上式两边以 $\mathbf{M}$ 作用后再取迹, 则由等式 $\mathbf{M}(\varepsilon)=\mathbf{I}$ 得

$$\chi(e)=\frac{\chi(\mathbf{1})}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(ex^{-1}e)\chi(exe). \tag{4}$$

把 (4) 式代入 (2) 式即得所要求的结果. □

根据定理 (6.2.5) 与 (6.2.8), 我们可把计算 ψ^G 的不可约分支的值的问题归结为计算相应的 Hecke 代数 $\mathscr{H}$ 的不可约特征标值的问题. 于是 Ree 的公式把计算 $F[G]$ 的特征标值的问题归结为计算 Hecke 代数 $\mathscr{H}$ 的特征标值的问题. 由于 $\mathscr{H}$ 的维数通常要比 $F[G]$ 的维数小得多, 故 Ree 的公式大大简化了我们所面临的问题. 但 Ree 的公式必须借助于关于幂等元 e 的较多信息. 下面的结果将告诉我们: 当幂等元 e 已被弄清楚时我们该如何来运用 Ree 的公式.

对于 $x \in G$ 与 $H \leqslant G$ 的特征标 ψ, 定义 ${}^x\psi$ 为共轭子群 ${}^xH$ 的特征标使得

$$ {}^x\psi({}^xh) = \psi(h), \quad \forall h \in H. $$

我们定义元素 $x \in G$ 关于子群 H 的指数为

$$ \mathrm{ind}_H(x) = [H : {}^xH \bigcap H]. $$

易证 $\mathrm{ind}_H(x)$ 等于双陪集 HxH 所含 H 左 (或右) 陪集的个数. 故 $\mathrm{ind}_H(x)$ 由 x 所在的 (H,H) 双陪集完全确定. 数集 $\{\mathrm{ind}_H(x) | x \in G\}$ 等于作为 $(1_H^G)_H$ 的直和项而出现的可迁置换表示的次数集合, 称该集合里的数为 1_H^G 的**子次数**.

(6.2.9) 命题 沿用定理 (6.2.5) 的记号. 设 ψ 是 H 的线性特征标. 则 $e = \dfrac{1}{|H|}\sum\limits_{h \in H}\psi(h^{-1})h$ 是 $F[H]$ 的对应于 ψ 的中心幂等元. 令 $H\backslash G/H = \{D_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$, 这里 $D_i = Hx_iH$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $x_i \in G$. 则关于 Hecke 代数 $\mathscr{H}$ 的下述结论成立:

(a) 记 $H_i = H \bigcap {}^{x_i}H, 1 \leqslant i \leqslant r$. 令 $J = \{j | 1 \leqslant j \leqslant r, ({}^{x_j}\psi)_{H_j} = \psi_{H_j}\}$. 定义: $a_j = (\mathrm{ind}_H(x_j))ex_je, \forall j \in J$. 则 $\{a_j\}_{j \in J}$ 是 $\mathscr{H}$ 的 F 基. 如 $\psi = 1_H$, 则基元素 a_j 独立于双陪集代表元 x_j 的选取. 如 $\psi \neq 1_H$, 则 a_j 关于不同的双陪集代表元 x_j 的选取只相差一个单位根因子.

(b) $\forall i, j \in J$, 我们有

$$ a_ia_j = \sum_{k \in J}\mu_{ijk}a_k, $$

这里 $\mu_{ijk} \in F$ 由下式给出:

$$ \mu_{ijk} = |H| \sum_{y \in D_i \bigcap x_kD_j^{-1}} a_i(y)a_j(y^{-1}x_k), $$

其中元素 $a_i \in F[G]$ 被当作 G 上 F 值函数. $\forall i, j, k$, μ_{ijk} 是 F 中的代数整数.

(c) 定义 $\mathscr{H}$ 上线性函数 λ 如下:

$$ \lambda\left(\sum_j \xi_j a_j\right) = \xi_1, $$

这里 $a_1 = e$. 定义 $\mathscr{H}$ 上双线性型 B 为

$$ B(a,b) = \lambda(ab), \quad \forall a, b \in \mathscr{H}. $$

则 B 是非退化的且满足: $\forall a, b, c \in \mathscr{H}$,

$$ B(a,b) = B(b,a), $$
$$ B(ab,c) = B(a,bc). $$

进而, $\{a_j\}_{j\in J}$ 与 $\{(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\widehat{a}_j\}_{j\in J}$ 是 $\mathscr{H}$ 的关于双线性型 B 的对偶基, 这里$\widehat{a}_j=(\mathrm{ind}_H(x_j))ex_j^{-1}e, \forall j\in J$.

注 $\{a_j\}_{j\in J}$ 称为 $\mathscr{H}$ 的**标准基元素**, 而 $\{\widehat{a}_j\}_{j\in J}$ 是 $\mathscr{H}$ 的另一组标准基元素.

证 (a) $\forall h\in H$, 我们有

$$he=eh=\psi(h)e.$$

先设 $h\in H\bigcap {}^xH$, 这里 $x\in G$, 则存在 $h_1\in H$ 使 $h={}^xh_1$, 且 ${}^x\psi(h)exe=\psi(h_1)exe=exeh_1=e^xh_1e=e^xh_1xe=\psi(h)exe$. 故由 $exe\neq 0$ 推出 ${}^x\psi$ 与 ψ 在 $H\bigcap {}^xH$ 上取值相同.

反之, 设 ${}^x\psi$ 与 ψ 在 $H\bigcap {}^xH$ 上取值相同. 先计算等式

$$exe=\frac{1}{|H|^2}\sum_{h_1,h_2\in H}\psi(h_1)^{-1}\psi(h_2)^{-1}h_1xh_2$$

中 x 的系数. 如 $h_1xh_2=x$, 则 $h_1\in H\bigcap {}^xH$ 与 $h_1={}^x(h_2^{-1})$. 因为 ψ 与 ${}^x\psi$ 在 $H\bigcap {}^xH$ 上取值相同, 我们有 $\psi(h_1)=\psi(h_2)^{-1}$. 故 x 在 exe 中的系数为 $\dfrac{|H\bigcap {}^xH|}{|H|^2}$. 类似地, h_1xh_2 在 exe 中的系数为 $\dfrac{|H\bigcap {}^xH|}{\psi(h_1)\psi(h_2)|H|^2}$. 因此, $\forall j\in J$, 我们有

$$a_j=\frac{1}{|H|}\sum_{h_1x_jh_2\in D_j}\psi(h_1)^{-1}\psi(h_2)^{-1}h_1x_jh_2\neq 0. \tag{5}$$

由此推出 $\{a_j\}_{j\in J}$ 是 F 线性无关的, 它们形成 $\mathscr{H}$ 的一组 F 基. 又显然, 改变双陪集代表元 x_j 对于每一个基元素 a_j 的影响是在 a_j 上乘以一个单位根, 这个单位根当 $\psi=1_H$ 时必须等于 1.

(b) 令

$$a_ia_j=\sum_k\mu_{ijk}a_k, \quad \forall i,j, \tag{6}$$

这里 $\mu_{ijk}\in F$. 为了计算结构常数 μ_{ijk}, 我们把元素 $\{a_i\}$ 看作 G 上复值函数. $F[G]$ 的乘法以函数的卷积代替. 让等式 (6) 两边在 x_k 上取值, 则由 (5) 式得

$$\begin{aligned}\mu_{ijk}|H|^{-1}=(a_ia_j)(x_k)&=\sum_{y\in G}a_i(y)a_j(y^{-1}x_k)\\&=\sum_{y\in D_i\bigcap x_kD_j^{-1}}a_i(y)a_j(y^{-1}x_k).\end{aligned}$$

由此得到所要求的关于 $\{\mu_{ijk}\}$ 的公式. 再由 (a) 知: $\forall h\in H$,

$$a_i(y)a_j(y^{-1}x_k)=a_i(yh)a_j((yh)^{-1}x_k), \quad \forall y\in G.$$

因 $D_i\bigcap x_kD_j^{-1}$ 是一些 H 左陪集的并, 令 I 为 $D_i\bigcap x_kD_j^{-1}$ 中 H 左陪集的代表系, 则

$$\mu_{ijk}|H|^{-1}=|H|\sum_{y\in I}a_i(y)a_j(y^{-1}x_k),$$

即

$$\mu_{ijk}=|H|^2\sum_{y\in I}a_i(y)a_j(y^{-1}x_k).$$

由 (5) 式知: 存在 F 中代数整数 α 使得

$$\mu_{ijk}=|H|^2|H|^{-2}\alpha=\alpha.$$

(c) 在等式 (5) 中以 x_j^{-1} 代替 x_j, 得

$$\widehat{a}_j=\frac{1}{|H|}\sum_{h_1x_j^{-1}h_2\in D_j^{-1}}\psi(h_1)^{-1}\psi(h_2)^{-1}h_1x_j^{-1}h_2.$$

故通过与 (b) 中相同的计算得

$$\begin{aligned}\lambda(a_i\widehat{a}_j)&=|H|\sum_{y\in D_i\bigcap D_j^{-1}}a_i(y)\widehat{a}_j(y^{-1})\\&=\begin{cases}0, & \text{如 } D_i\neq D_j^{-1},\\ |H||H|^{-2}|Hx_jH|=\mathrm{ind}_H(x_j), & \text{如 } D_i=D_j^{-1}.\end{cases}\end{aligned}$$

□

(6.2.10) 定理 设 ψ 是 G 的子群 H 的线性特征标. $\mathscr{H}$ 是 Hecke 代数 $\mathscr{H}(G,H,\psi)$.

(a) $\mathscr{H}$ 的中心本原幂等元集合 $\{ee_i|(\chi_i,\psi^G)\neq 0\}$ 由下式给出:

$$ee_i=\frac{\chi_i(\mathbf{1})|H|}{|G|}\sum_{j\in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\chi_i(\widehat{a}_j)a_j,$$

这里 $\{a_j\}_{j\in J}$ 与 $\{(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\widehat{a}_j\}_{j\in J}$ 是命题 (6.2.9)(c) 中所定义的 $\mathscr{H}$ 的互相对偶的二组基.

(b) (正交关系) 令 φ,φ' 为 $\mathscr{H}$ 的不可约特征标.则

$$\sum_{j\in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi(\widehat{a}_j)\varphi(a_j)=\begin{cases}0, & \text{如}\quad \varphi\neq\varphi',\\ \varphi(e)[G:H]\chi(\mathbf{1})^{-1}, & \text{如}\quad \varphi=\varphi'.\end{cases}$$

这里 $\chi\in\mathrm{Irr}_FG$ 满足 $\varphi=\chi|_{\mathscr{H}}$.

(c) 设 $\chi\in\mathrm{Irr}_FG$ 满足 $(\chi,\psi^G)\neq 0$. 如 $\chi|_{\mathscr{H}}=\varphi$, 则

$$\chi(\mathbf{1})=[G:H](\chi,\psi^G)\left(\sum_{j\in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi(\widehat{a}_j)\varphi(a_j)\right)^{-1}.$$

证 (a) 据推论 (6.2.6) 知: 元素 $\{ee_i|(\chi_i,\psi^G)\neq 0\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的中心本原幂等元. 由公式 (3) 得

$$ee_i=\frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_i(ex^{-1}e)exe,$$

这里 $\chi_i\in \mathrm{Irr}_F G$ 满足 $(\chi_i,\psi^G)\neq 0$. 令 $x=hx_jk\in D_j,h,k\in H$, 则 $x^{-1}=k^{-1}x_j^{-1}h^{-1}$. 由命题 (6.2.9) 中关于 $\{a_i\}$ 与 $\{\widehat{a}_j\}$ 的定义得

$$\begin{aligned}\chi_i(ex^{-1}e)exe&=\psi(h)\psi(h^{-1})\psi(k)\psi(k^{-1})\chi_i(ex_j^{-1}e)ex_je\\&=(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-2}\chi_i(\widehat{a}_j)a_j.\end{aligned}$$

由此可见: 当取 x 为 D_j 中不同元素时, $\chi_i(ex^{-1}e)exe$ 保持不变. 这推出

$$\begin{aligned}ee_i&=\frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{j\in J}\sum_{x\in D_j}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-2}\chi_i(\widehat{a}_j)a_j\\&=\frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{j\in J}|Hx_jH|(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-2}\chi_i(\widehat{a}_j)a_j\\&\qquad\qquad(\text{因}|Hx_jH|=|D_j|)\\&=\frac{\chi_i(1)}{[G:H]}\sum_{j\in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\chi_i(\widehat{a}_j)a_j\\&\qquad\qquad(\text{因}|Hx_jH|=(\mathrm{ind}_H(x_j))|H|).\end{aligned}$$

(b) 对于使 $(\chi_i,\psi^G)\neq 0$ 的所有 $\chi_i\in\mathrm{Irr}_F G$, 置 $\varphi_i=\chi_i\big|_{\mathscr{H}}$. 由定理 (6.2.5)(b) 知: 这些 φ_i 是 $\mathscr{H}$ 的不可约特征标. 因为 ee_i 是 $\mathscr{H}$ 的对应于 φ_i 的中心本原幂等元, 我们有

$$\varphi_j(ee_i)=\begin{cases}0, & \text{如}\quad j\neq i,\\ \varphi_i(ee_i) & \text{如}\quad j=i,\end{cases}$$

这里 $\varphi_i(ee_i)=\varphi_i(e)$. 将 (a) 中关于 ee_i 的公式代入上式即得 (b) 中的正交性公式.

(c) 由 (b) 推出

$$\chi_i(1)=\varphi_i(e)[G:H]\left(\sum_{j\in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi_i(\widehat{a}_j)\varphi_i(a_j)\right)^{-1}.$$

因为由命题 (6.2.1) 知

$$\varphi_i(e)=\chi_i(e)=(\chi_i,\psi^G).$$

这推出 (c). □

上面的某些结果在可迁置换表示 1_H^G 的情形下变得特别简单.

(6.2.11) 命题 设 $H \leqslant G, \psi = 1_H$ 与 $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G, H, 1_H)$. 则

(a) $\mathscr{H}$ 的标准基元素由下式给出:

$$a_j = \frac{1}{|H|}\sum_{x \in D_j} x, \quad \forall j \in J,$$

这里 $\{D_j\}_{j \in J}$ 是 G 的 (H, H) 双陪集的集合.

(b) 由基 $\{a_i\}$ 决定的结构常数 $\{\mu_{ijk}\}$ 为

$$\mu_{ijk} = \frac{|D_i \bigcap x_k D_j^{-1}|}{|H|}, \quad \forall x_k \in D_k,\ i, j, k \in J.$$

(c) 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$ 满足 $(\chi, 1_H^G) \neq 0$. 令 $\varphi = \chi|_{\mathscr{H}}$. 则定理 (6.2.8) 的特征标公式变为

$$\chi(t) = \frac{|C_G(t)|}{|H|}\left(\sum_{j \in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi(a_j)|\mathscr{C}\bigcap D_j|\right)$$
$$\times\left(\sum_{j \in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi(\widehat{a}_j)\varphi(a_j)\right)^{-1},$$

这里元素 t 属于 G 的共轭类 $\mathscr{C}$.

证 (a), (b) 是命题 (6.2.9) (a), (b) 的直接推论.

由定理 (6.2.8) 推出

$$\chi(t) = |C_G(t)|\chi(eKe)\left(\sum_{x \in G}\chi(ex^{-1}e)\chi(exe)\right)^{-1}, \tag{7}$$

这里 $K = \sum_{x \in \mathscr{C}} x$. 由于

$$exe = (\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}a_j, \quad \forall x \in D_j,$$

我们有

$$\chi(eKe) = \sum_{j \in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi(a_j)|\mathscr{C}\bigcap D_j|, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x \in G}\chi(ex^{-1}e)\chi(exe) &= \sum_{j \in J}|D_j|(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-2}\chi(\widehat{a}_j)\chi(a_j)\\ &= |H|\sum_{j \in J}(\mathrm{ind}_H(x_j))^{-1}\varphi(\widehat{a}_j)\varphi(a_j).\end{aligned} \tag{9}$$

把 (8) 式与 (9) 式代入 (7) 式即得所求的特征标公式. □

习　题

1. 设 $\mathscr{H}(G,H,\psi)$ 是 Hecke 代数. 证明:
$\mathscr{H}(G,H,\psi)$ 是交换代数 $\Longleftrightarrow (\zeta,\psi^G)=0$ 或 1, $\forall\zeta\in\mathrm{Irr}_F G$.

2. 沿用定理 (6.2.9) 的记号. 定义线性映射

$$\mathrm{ind}:\mathscr{H}(G,H,1_H)\longrightarrow F$$

使得
$$\mathrm{ind}_H(a_j)=\mathrm{ind}_H(x_j).$$
证明: ind 是 F 代数同态. 它作为 $\mathscr{H}(G,H,1_H)$ 的线性特征标在定理 (6.2.5) (b) 所定义的映射下对应于 G 的单位特征标 1_G.

3. (D.G.Higman) 设 F 是代数闭域, char. $F=0$. 令 $\mathscr{H}=\mathscr{H}(G,H,1_H)$ 是置换表示 1_H^G 的 Hecke 代数. 设存在某标准基元素 a_1 使 $\mathscr{H}=F[a_1]$. 令 $e=\dfrac{1}{|H|}\sum\limits_{h\in H}h$, $V=F[G]e$. 把 V 看作 $(F[G],\mathscr{H})$ 双模, 这里 $\mathscr{H}=eF[G]e$ 右乘作用于 V. 令 $\mathbf{M}$ 为 a_1 在 $\mathscr{H}$ 上的右乘作用所对应的矩阵. 令 $\mathbf{A}$ 为 a_1 在 V 上的右乘作用所对应的矩阵. 则 $\mathbf{M}$ 由结构常数 $\{\mu_{ijk}\}$ 所确定. 称 $\mathbf{M}$ 为该置换表示的**交矩阵**. 证明下列诸结果成立:

(a) $\mathbf{M}$与 $\mathbf{A}$ 的最小多项式相同. 它们都等于 $\mathbf{M}$ 的特征多项式 $p(t)$.

(b) $p(t)$ 有相异根 $\{\theta_1,\cdots,\theta_m\}$.$V$ 的不可约 $F[G]$ 子模的重数都等于 1. 这些不可约子模集合恰为 $\{V_{\theta_i}|1\leqslant i\leqslant m\}$, 这里 V_{θ_i} 为对应于 $\mathbf{A}$ 的特征值 θ_i 的特征子空间.

(c) $\forall 1\leqslant i\leqslant m$, 令 $p_i(t)=p(t)/(t-\theta_i)$. 则 $\dim_F V_{\theta_i}=\dfrac{\mathrm{tr}.p_i(\mathbf{A})}{p_i(\theta_i)}$.

(d) 令 $a_1^s=\sum\limits_{i=0}^{m}\eta_{si}a_i$, $s=1,2,\cdots$, 这里 $a_0=e,\{a_0,\cdots,a_m\}$ 为 $\mathscr{H}$ 的标准基元素. 则 tr. $\mathbf{A}^s=[G:H]_{\eta_{s0}}$. 故由 (c) 给出的 1_H^G 的不可约子模的维数可由交矩阵 $\mathbf{M}$ 计算而得.

提示　(a) 我们有 $\mathscr{H}\cong F[t]/(m(t))$, 这里 $m(t)$ 是 $\mathbf{M}$ 的最小多项式. 因为 $\mathscr{H}$ 是半单的, F 是代数闭域, 故 $m(t)$ 在 F 中有相异根. 于是 $m(t)=p(t)$, 这里 $p(t)$ 是 $\mathbf{M}$ 的特征多项式. 由 $p(\mathbf{M})=0$ 得 $p(a_1)_r=0$ (注: a_r 是 $\mathscr{H}$ 上的对应于 a 的右乘算子). 因为映射 $a\longmapsto a_r$ 是 $\mathscr{H}$ 的忠实表示, 故 $p(a_1)=0$. 因此 $V\cdot p(a_1)=0$. 这推出 $p(\mathbf{A})=0$. 于是 $\mathbf{A}$ 的最小多项式整除 $p(t)$. 另一方面, $\mathscr{H}=eF[G]e\subseteq V$, $\mathscr{H}$ 在 a_1 对于 V 的左乘作用下稳定. 于是对于每个多项式 $f(t)\in F[t]$, 由等式 $f(\mathbf{A})=0$ 可推出 $\mathscr{H}f(a_1)=0$. 因此

$$p(t)|f(t).$$

(b) 因为 $\mathscr{H}$ 是交换代数, 故由第 1 题的结果知 1_H^G 的不可约分量的重数均不大于 1, 与在 1_H^G 中出现的不可约特征标 ζ_i 相对应的子模有形状

$$e_iV=Ve_ie,$$

这里 e_i 如推论 (6.2.6) 之前所定义. 令 e_ie 为 $\mathscr{H}$ 的中心本原幂等元. 这推出: $\forall i,1\leqslant i\leqslant m$, 存在某 θ_i 使 $e_iV=V_{\theta_i}$.

(c) $\mathbf{A}$是以 $\{\theta_i\}$ 为特征值的半单矩阵 (注: 与对角矩阵相似的矩阵称为半单矩阵). 因此对于每个 $f(t) \in F[t]$, 我们有

$$\text{tr}.f(\mathbf{A}) = \sum_i (\dim V_{\theta_i}) f(\theta_i).$$

特别, $\forall j$, 我们有

$$\text{tr}.p_j(\mathbf{A}) = \sum_i (\dim V_{\theta_i}) p_j(\theta_i) = (\dim V_{\theta_j}) p_j(\theta_j).$$

这证明了 (c).

(d) 只要验证: 如 $a_j^s = \sum_{i=0}^{m-1} \eta_{si} a_i, \ \forall s = 1, 2, \cdots$, 则

$$\text{tr}.((a_0)_r, V) = [G : H] \quad 与 \quad \text{tr}.((a_i)_r, V) = 0, \forall i \neq 0.$$

因 e 作为恒等算子作用于 V, 且 $\dim V = [G : H]$, 故第一个结论是显然的. 其次, $V = F[G]e$ 有对应于 (H, H) 双陪集 $\{D_j\}$ 中 H 左陪集的基 $\{hx_je\}$. 由 a_i 通过右乘作用于这些基元素得

$$(hx_je)a_i = \sum \alpha(i, h, x_j, h', x_{j'}) h' x_{j'} e, \tag{$*$}$$

这里 $\alpha(i, h, x_j, h', x_{j'})$ 是非负整系数. 上式描述了 hx_jD_i 按 H 左陪集的划分. 通过计算知: $\forall i \neq 0$, 如 $\text{tr}.((a_i)_r, V) \neq 0$, 则某对角系数 $\alpha(i, h_i, x_j, h_i, x_j) \neq 0$. 以 $(hx_j)^{-1}$ 乘以 $(*)$ 式两边得 $D_i \bigcap H \neq \varnothing$, 引起矛盾.

4. 设 $H \leqslant G$ 与 $\chi = 1_H^G$. 则

(a) $\chi(1) \,|\, |G|$.

(b) $\forall \psi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}} G$, 有 $(\chi, \psi) \leqslant \psi(1)$.

(c) $(\chi, 1_G) = 1$.

(d) $\forall g \in G, \chi(g)$ 是非负整数.

(e) $\forall g \in G$ 与 $m \in \mathbb{Z}$, 有 $\chi(g) \leqslant \chi(g^m)$.

(f) 如 g 的阶数不整除 $\dfrac{|G|}{\chi(1)}$, 则 $\chi(g) = 0$.

(g) $\forall g \in G$, $\dfrac{\chi(g)|\text{Cl}(g)|}{\chi(1)}$ 是非负整数, 这里 $\text{Cl}(g)$ 是 g 所在的共轭类.

第七章　诱导特征标的 Artin 定理与 Brauer 定理

设 H 是 G 的子群. 前面已在 $F[H]$ 模范畴与 $F[G]$ 模范畴之间定义了诱导和限制二个函子. 当取 H 为若干不同子群时, 我们有可能通过这二个函子得到关于 G 的表示的大量新信息. 本章将给出关于这方面的几个重要结果, 其中包括有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 Artin 诱导特征标定理与数域 $F \subseteq \mathbb{C}$ 上的 Brauer 诱导特征标定理.

Brauer 定理无疑在特征标理论中扮演中心角色. Brauer 用该定理证实了一个由来已久的猜想, 该猜想认为 n 次单位根在 $\mathbb{Q}$ 上生成的分圆域 $\Lambda^{(n)}$ 是 n 阶有限群的分裂域. Brauer 定理的另一个应用是关于广义特征标的 Brauer 刻画, 它被应用于许多定理的证明中. Brauer 定理的后一个应用以及 Brauer 定理的一个逆定理由 Green 给出.

§7.1　诱导特征标的 Artin 定理

称 G 的 $\mathbb{Q}$ 表示为**有理表示**, 相应的特征标称为 G 的**有理特征标**. 显然, 对于任意 $H \leqslant G$, 置换表示的特征标 1_H^G 是有理特征标.

为了叙述与证明 Artin 诱导定理, 我们先给出一个引理.

(7.1.1) 引理　*设 (ρ, V) 是 G 的特征标为 μ 的有理表示, 设 G 的二个循环子群 $\langle x\rangle$ 与 $\langle y\rangle$ 在 G 中共轭, 则 $\mu(x) = \mu(y)$.*

证 因 μ 是类函数, 不妨设 $\langle x\rangle=\langle y\rangle$. 令 n 为 x 的阶数. 则存在与 n 互素的整数 a 使 $y=x^a$. 设 $\{\xi_i\}$ 是 V 上线性变换 $\rho(x)$ 的特征值多重集, 则每个 ξ_i 是 n 次单位根. 我们有

$$\mu(x)=\sum_i \xi_i,\quad \mu(y)=\sum_i \xi_i^a.$$

令 ω 为 n 次单位原根. 则 ω^a 也为 n 次单位原根. 故存在域 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的 $\mathbb{Q}$ 自同构 σ 使 $\sigma(\omega)=\omega^a$. 于是由 $\mu(x)\in\mathbb{Q}$ 推出

$$\mu(x)=\sigma(\mu(x))=\sum\sigma(\xi_i)=\sum\xi_i^a=\mu(y).$$ □

定义函数 $\mu:\mathbb{N}\to\{0,1,-1\}$ 如下: $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{如 } n=1,\\ 0, & \text{如存在某整数 } a>1 \text{使 } a^2|n,\\ (-1)^r, & \text{如 } n \text{是 } r \text{个互异素数的乘积},\end{cases}\tag{1}$$

称 μ 为 **Möbius 函数**. 容易验证关于函数 μ 的如下等式成立:

$$\mu(nm)=\mu(n)\mu(m),\quad \text{如 } (n,m)=1,\tag{2}$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{如 } n=1,\\ 0, & \text{如 } n>1.\end{cases}\tag{3}$$

现在我们可以叙述

(7.1.2) 定理 (Artin) *群 G 的每个有理特征标 φ 有形状*

$$\varphi=\sum_C a_C 1_C^G,\tag{4}$$

这里 C 取遍 G 的所有循环子群, $a_C\in\mathbb{Q}$ 由下式给出:

$$a_C=\frac{1}{[G:C]}\sum_{C^*\supseteq C}\mu([C^*:C])\varphi(z^*),\tag{5}$$

上式中 C^* 取遍 G 的含 C 的所有循环子群, z^* 是 C^* 的一个生成元.

证 (Brauer) 由引理 (7.1.1) 知: 值 $\varphi(z^*)$ 独立于 C^* 的生成元 z^* 的选取. 令

$$\varphi^*=\sum_C a_C 1_C^G,$$

这里 a_C 由公式 (5) 给出. 我们必须证明 $\varphi^*=\varphi$.

令 $x\in G$, 则

$$1_C^G(x)=\frac{1}{|C|}\sum_{y\in G}\dot{1}_C(y^{-1}xy).$$

若 $1_C^G(x) \neq 0$, 则由于 1_C^G 是 G 上类函数, 不妨设 $x \in C$. 若 $y \in N_G(\langle x\rangle)$, 则 $y^{-1}xy \in C$. 反之, 若 $y^{-1}xy \in C$, 则

$$y^{-1}x^a y = (y^{-1}xy)^a \in C, \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

故 $y \in N_G(\langle x\rangle)$. 这说明

$$y \in N_G(\langle x\rangle) \Longleftrightarrow y^{-1}xy \in C,$$

即

$$N_G(\langle x\rangle) = \{y \in G | y^{-1}xy \in C\}.$$

因此我们有

$$1_C^G(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y^{-1}xy \notin C,\ \forall y \in G, \\ \dfrac{|N_G(\langle x\rangle)|}{|C|}, & \text{若存在 } y \in G \text{使 } y^{-1}xy \in C. \end{cases}$$

由此得

$$\varphi^*(x) = \frac{|N_G(\langle x\rangle)|}{|G|}\sum_C{}' \sum_{C^*\supseteq C} \mu([C^*:C])\varphi(z^*),$$

这里和式 Σ' 中 C 取遍所有含 x 的一个共轭元素的循环子群. 今在 G 中恰有 $[G:N_G(\langle x\rangle)]$ 个共轭于 $\langle x\rangle$ 的循环群. 任何循环子群 C 至多含一个这样的共轭子群. 故关于 $\varphi^*(x)$ 的表达式可简化为

$$\varphi^*(x) = \sum_{C\ni x}{}'' \sum_{C^*\supseteq C} \mu([C^*:C])\varphi(z^*),$$

这里和式 Σ'' 中 C 取遍所有含 x 的循环子群. 重新排列这些加项得

$$\varphi^*(x) = \sum_{C^*\ni x} \varphi(z^*) \sum_C \mu([C^*:C]),$$

这里外边和式 Σ 中 C^* 取遍含 x 的循环子群, 里边和式 Σ 中 C 取遍满足 $C^* \supseteq C \supseteq \langle x\rangle$ 的子群. 对于每一阶数为 m 的固定子群 C^*, 里边和式可表为

$$\sum_{d|(m/t)} \mu(d),$$

这里 $|\langle x\rangle| = t$. 由公式 (3) 知: 当 $\dfrac{m}{t} \neq 1$ 时, 上式等于零; 当 $\dfrac{m}{t} = 1$ 时, $C^* = \langle x\rangle$. 故由引理 (7.1.1) 知 $\varphi^*(x) = \varphi(x)$. □

习　题

1. 设 $P(G)$ 是 G 的形如 $1_H^G, H \leqslant G$, 的特征标的整线性组合的集合. 设 χ 是 G 的有理特征标. 设 $n_G(\chi)$ 是使 $n_G(\chi)\chi \in P(G)$ 的最小正整数. 令 $N = \mathrm{Ker}\chi$. 则 χ 可被看作 G/N 的特征标. 证明

$$n_G(\chi) = n_{G/N}(\chi).$$

注 正整数 $n_G(\chi)$ 的存在性由 Artin 定理保证.

提示 如 $n\chi = \sum_H a_H 1_H^G$, 则 $n\chi = \sum_H a_H 1_{NH}^G$.

为了证明这一断言, 可写 $1_H^G = 1_{NH}^G + \xi^{(H)}$, 这里 $\xi^{(H)} \in \mathrm{ch}(G)$, 使 N 不含于 1_H^G 的任何不可约分量的核内.

2. 设 $\chi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}^{+}(G)$. 证明

$$|G|\chi = \sum_\lambda a_\lambda \lambda^G,$$

这里 λ 跑遍 G 的循环子群的线性特征标的集合, $a_\lambda \in \mathbb{Z}$.

3. 设 m 是 G 的共轭循环子群类的个数. 证明 m 等于不可约 $\mathbb{Q}[G]$ 模的同构类个数.

提示 设 $\{C_1, \cdots, C_m\}$ 是 G 的共轭循环子群类的代表系. 则由习题 2 与定理 (7.1.2) 知: G 的每个有理特征标 φ 有形状

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{|G|} 1_{C_i}^G, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

利用引理 (7.1.1) 证明: 每个有理特征标 μ 由其在 $C_1, \cdots, C_m$ 的生成元上的值所唯一确定. 故至多存在 m 个不同构的不可约 $\mathbb{Q}[G]$ 模. 另一方面, 对于 G 的每个循环子群 C, 令

$$t_C = \sum_{C' \leqslant C} \frac{1}{[C:C']} \mu([C:C']) 1_{C'}^G.$$

利用定理 (7.1.2) 的证明可证: $\forall x \in C$,

$$t_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{如 } C = \langle x \rangle, \\ 0, & \text{如否}. \end{cases}$$

然后证明: $\{t_{C_1}^G, \cdots, t_{C_m}^G\}$ 线性独立.

§7.2 诱导特征标的 Brauer 定理

本节假设 $F \subseteq \mathbb{C}$, 且 F 是群 G 及其子群的分裂域. 我们的主要目的是证明诱导特征标的 Brauer 定理, 并运用该定理导出广义特征标的 Brauer 刻画与分裂域的 Brauer 定理.

(7.2.1) 定理 (诱导特征标的 Brauer 定理) *G 的每个 F 特征标 ζ 可表为有限和*

$$\zeta = \sum_i a_i \lambda_i^G,$$

这里 λ_i 是 G 的某初等子群 H_i 的线性特征标, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Brauer 曾给出上述定理的第一个证明. 其后, Brauer 与 Tate, Asano 等相继给出了较简单的证明. 证明 Brauer 定理的关键是考虑特征标环 $\mathrm{ch}_F(G)$ 的某些理想 (本节中以 $\mathrm{ch}(G)$ 记 $\mathrm{ch}_F(G)$). 我们将采用 Goldschmidt 与 Isaacs 的证明.

回忆 G 的特征标环 $\mathrm{ch}(G)$ 是 G 上 F 值类函数环 $\mathrm{cf}\,(G)$ 的子环, 它由 G 的所有 F 特征标的整线性组合构成. $\mathrm{ch}(G)$ 的恒等元是 G 的单位特征标 1_G. 设 $H \leqslant G$, 则映射

$$\mathrm{ind}_H^G : \lambda \longmapsto \lambda^G$$

是从 $\mathrm{cf}(H)$ 到 $\mathrm{cf}(G)$ 内的加法群同态, 它把 $\mathrm{ch}(H)$ 映到 $\mathrm{ch}(G)$ 内. 因为 $\forall \psi \in \mathrm{ch}(H)$ 与 $\chi \in \mathrm{ch}(G)$, 我们有

$$\psi^G \chi = (\psi \chi_H)^G,$$

所以 $\mathrm{ind}_H^G(\mathrm{ch}(H))$ 是 $\mathrm{ch}(G)$ 的理想.

设 $\mathscr{F}$ 是 G 的某子群集合. 记

$$\mathrm{ch}_{\mathscr{F}}(G) = \left\{ \sum_{i \in I} a_i \psi_i^G \middle| \psi_i \in \mathrm{ch}(H_i), \quad H_i \in \mathscr{F}, a_i \in \mathbb{Z}, |I| < \infty \right\}. \tag{1}$$

则 $\mathrm{ch}_{\mathscr{F}}(G)$ 是 $\mathrm{ch}\,(G)$ 的理想. $\mathrm{ch}_{\mathscr{F}}(G) = \mathrm{ch}(G)$ 当且仅当 $1_G \in \mathrm{ch}_{\mathscr{F}}(G)$.

Brauer 定理的 Goldschmidt–Isaacs 证明分二个步骤:

(a) 对于 G 的拟初等子群族 $\mathscr{F}$, 证明 $1_G \in \mathrm{ch}_{\mathscr{F}}(G)$.

(b) 证明 Brauer 定理当 G 是拟初等群时成立.

为了完成步骤 (b), 我们必须先证明 Blichfeldt 定理的 Brauer 推广: 拟初等群是 M 群.

步骤 (a) 的完成基于下面二个引理.

(7.2.2) 引理 (Banaschewski) *设 A 是非空有限集合 X 上 $\mathbb{Z}$ 值函数环 (不必含恒等元). 令 1_X 为在 X 上值等于 1 的常函数. 如 $1_X \notin A$, 则存在 $x \in X$ 与素数 p 使得*

$$p | f(x), \quad \forall f \in A.$$

证 $\forall x \in X$, 记 $I_x = \{f(x) | f \in A\}$. 则 I_x 是 $\mathbb{Z}$ 的子环 (不必含恒等元). 如 $I_x \neq \mathbb{Z}$, 则存在某素数 p 使 $I_x \subseteq (p)$. 这里 $(p) = \{mp | m \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的由 p 生成的主理想. 于是

$$p | f(x), \quad \forall f \in A.$$

为了证明本引理, 我们只需证明: 如 $\forall x \in X$, 恒有 $I_x = \mathbb{Z}$, 则 $1_X \in A$.

设 $\forall x \in X$, 恒有 $I_x = \mathbb{Z}$. 则

$$1 \in I_x, \quad \forall x \in X.$$

可选取 $f_x \in A$ 使 $f_x(x) = 1$. 则

$$\prod_{x \in X} (1_X - f_x) = 0.$$

把上式左边的积展开, 可见 1_X 是函数 $\{f_x\}$ 的积的整线性组合. 因此 $1_X \in A$.□

(7.2.3) 引理 对于 $g \in G$ 与素数 p, 总存在 G 的 p 拟初等子群 H 使 $p \nmid 1_H^G(g)$.

证 可将群 $\langle g\rangle$ 写成二个子群 Z 和 W 的直积: $\langle g\rangle = Z \times W$ 使得 $p \nmid |Z|$ 与 $|W| = p^k, k \in \mathbb{N}$. 令 $N = N_G(Z)$. 令 H 为 N 的子群使得 H/Z 为 N/Z 的含 $\langle g\rangle/Z$ 的 Sylow p 子群. 则 H 是 p 拟初等群.

今 $1_H^G(g)$ 等于 G 中被 g 固定的 H 左陪集的个数. 若 $gaH = aH$, 则 $g^a \in H$. 因此 $Z^a \subseteq \langle g\rangle^a \subseteq H$. 由于 Z 是 H 中唯一的阶数等于 $|Z|$ 的子群, 我们有 $Z^a = Z$ 与 $a \in N$. 注意 $g \in N$. 这证明了 $1_H^G(g) = 1_H^N(g)$.

其次, $Z \lhd N$ 与 $Z \lhd H$. 这推出 Z 通过左乘平凡地作用于 N 的 H 左陪集. 故 $\langle g\rangle$ 对 N/H 的左乘作用也可被看作 $\langle g\rangle/Z$ 对 N/H 的左乘作用. 因 $\langle g\rangle/Z$ 是 p 群, 故 N/H 的每个非平凡 $\langle g\rangle$ 轨道的元素个数都是 p 的倍数. 因此

$$1_H^N(g) = |\{aH | a \in N, gaH = aH\}| \equiv [N : H] \pmod p.$$

由于 $p \nmid [N : H]$, 故 $p \nmid 1_H^N(g)$. 这推出 $p \nmid 1_H^G(g)$. □

(7.2.4) 定理 G 的每个 F 特征标 ζ 可表为有限和

$$\zeta = \sum_i a_i \xi_i^G,$$

这里 ξ_i 是 G 的某拟初等子群 H_i 的特征标. $a_i \in \mathbb{Z}$.

证 记 Q 为 G 的拟初等子群的集合. 则定理的结论相当于

$$\mathrm{ch}_Q(G) = \mathrm{ch}(G).$$

因 $\mathrm{ch}_Q(G)$ 是 $\mathrm{ch}(G)$ 的理想, 我们只要证

$$1_G \in \mathrm{ch}_Q(G).$$

令 R 为 $\mathrm{ch}_Q(G)$ 的子环 (不必含恒等元), 它由 G 的拟初等子群的单位特征标的诱导特征标生成. 我们断言

$$1_G \in R.$$

若否, 则由引理 (7.2.2) 知: 存在 $g \in G$ 与素数 p 使对于每个 $\chi \in R$ 有 $\chi(g) \equiv 0 \pmod p$. 这与引理 (7.2.3) 的结论相矛盾. 于是 $1_G \in R \subseteq \mathrm{ch}_Q(G)$. 这推出本定理的结论. □

下面的结论将告诉我们: 任何 p 拟初等群是 M 群 (关于 M 群的定义见 §5.3 习题 4).

(7.2.5) 定理 (Blichfeldt-Brauer) 设 G 是 p 拟初等群与 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. 则

(a) $\chi(1)$ 是 p 的幂.

(b) 存在 G 的某子群的线性特征标 λ 使 $\chi = \lambda^G$.

证 可写 $G = Z \rtimes P$, 这里 Z 是循环 p' 群. P 是 p 群.

(a) 令 ψ 为 χ_Z 的不可约分量. 令 T 为 ψ 在 G 中的惯性群. 则 $Z \lhd T$ 且 $[G:T]$ 是 p 的幂. 由推论 (5.3.10) 得知: 存在 $\zeta \in \mathrm{Irr}_F T$ 使 $\chi = \zeta^G$. 此时, 如 $T \neq G$, 注意 T 也是 p 拟初等群, 则在 $|G|$ 上运用归纳法得: $\deg\zeta$ 是 p 的幂.于是 $\deg\chi = [G:T]\deg\zeta$ 也是 p 的幂. 如 $T = G$, 则由于 Z 是阿贝尔群, 故 $\deg \psi = 1$. 由定理 (6.1.1) 知: $\chi_Z = (\deg\chi)\psi$. 由 χ 的不可约性推知: χ_P 不可约. 但 P 是 p 群. 故 $(\deg\chi)||P|$, 即 $\chi(1)$ 是 p 的幂.

(b) 由 (a) 知存在 $n \geqslant 0$ 使 $\chi(1) = p^n$. 在 n 上运用归纳法. 当 $n = 0$ 时结论显然. 现设 $n > 0$. 对于 G 的任何线性特征标 λ, 我们有 $\chi\lambda \in \mathrm{ch}^+(G)$, 且 $(\chi\lambda)(1) = \chi(1)$. 于是要么 $\chi = \chi\lambda$, 要么 χ 不是 $\chi\lambda$ 的分量. 令

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathrm{Irr}_F G | \deg\lambda = 1, \chi\lambda = \chi\}.$$

则

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{\lambda \in \mathrm{Irr}_F G | \deg\lambda = 1, (\chi, \chi\lambda) = 1\} \\ &= \{\lambda \in \mathrm{Irr}_F G | \deg\lambda = 1, (\chi\overline{\chi}, \lambda) = 1\} \\ &= \{\lambda \in \mathrm{Irr}_F G | \deg\lambda = 1, \lambda\text{在 } \chi\overline{\chi} \text{ 中重数为 } 1\}.\end{aligned}$$

因为 $1_G \in \Lambda$, 故 Λ 为非空集合. 易见 Λ 是以 1_G 为恒等元的乘法群. 记

$$\chi\overline{\chi} = \sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda + \sum\chi'. \tag{2}$$

上式右边第二个和式中的 χ' 为 $\chi\overline{\chi}$ 的非线性不可约分量. 由 (a) 知: $\deg\chi\overline{\chi}$ 与 $\deg\chi'$ 都是 p 的幂. 等式 (2) 的两边在恒等元上取值得

$$|\Lambda| \equiv 0 \pmod p.$$

熟知阶数被 p 整除的有限群含有 p 阶元素. 故存在 $\lambda_1 \in \Lambda$ 使 $\lambda_1 \neq 1_G$ 与 $\lambda_1^p = 1_G$. 群同态 $\lambda_1 : G \to \mathbb{C}^*$ 的像为 p 次单位根的群, 这里 $\mathbb{C}^*$ 是非零复数的乘法群, 而 $K = \mathrm{Ker}\lambda_1$ 满足 $K \lhd G$ 与 $[G:K] = p$. 把等式 (2) 限制于 K 得

$$\chi_K\overline{\chi}_K = \sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda_K + \sum\chi'_K \tag{3}$$

由于等式 (3) 右边第一个和式中至少含有二个 1_K, 即 $(1_G)_K$ 与 $(\lambda_1)_K$. 故 $\chi_K\overline{\chi}_K$ 中至少含有二个 1_K. 这推出

$$(\chi_K, \chi_K) = (\chi_K\overline{\chi}_K, 1_K) \geqslant 2.$$

因此 χ_K 可约.

令 ζ 为 χ_K 的不可约分量. 易见 K 是 p 拟初等群. 由 (a) 知: $\zeta(1)$ 与 $\chi(1)$ 都是 p 的幂. 于是从不等式 $\zeta(1) < \chi(1)$ 推知

$$\chi(1) \geqslant p\,\zeta(1). \tag{4}$$

另外, 由定理 (5.2.4) 推出: χ 是 ζ^G 的不可约分量. 故

$$\chi(1) \leqslant \zeta^G(1) = [G:K]\zeta(1) = p\zeta(1). \tag{5}$$

由 (4) 式与 (5) 式知: $\chi(1) = \zeta^G(1)$. 这推出: $\chi = \zeta^G$. 因为

$$\zeta(1) = \frac{1}{p}\chi(1) = p^{n-1},$$

由归纳假设知: 存在 $H \leqslant K$ 及 H 的线性特征标 λ 使 $\zeta = \lambda^K$. 因此,

$$\chi = \zeta^G = (\lambda^K)^G = \lambda^G. \qquad \square$$

由定理 (7.2.4) 与 (7.2.5) 推出: G 的每个 F 特征标 ζ 可表为有限和

$$\zeta = \sum_i a_i \lambda_i^G,$$

这里 λ_i 是 G 的某拟初等子群 H_i 的线性特征标, $a_i \in \mathbb{Z}$.

现在我们要进一步证明上面的 H_i 都可取为 G 的初等子群.

设 G 是 p 拟初等群. 可写 $G = ZP$, 这里 Z 是 G 的循环正规 p' 子群, P 是 G 的 p 子群. 令 $W = C_Z(P)$ 与 $H = WP$. 则 H 是 G 的 p 初等子群, 而 P 是 H 的正规 Sylow p 子群.

(7.2.6) 引理 *沿用上面的记号. 设 λ 是 G 的线性特征标使得 $H \subset \mathrm{Ker}\lambda$, 则 $\lambda = 1_G$.*

证 因 $G = ZH$, 故只要证: $Z \subset \mathrm{Ker}\lambda$. 令 $K = Z \bigcap \mathrm{Ker}\lambda$. 则只要证: $K = Z$. 我们有

$$\lambda(b^{-1}dbd^{-1}) = 1, \quad \forall b \in Z, d \in P,$$

即
$$b^{-1}dbd^{-1} \in K.$$

于是 $dbd^{-1} \in bK$. 进而, $d(bK)d^{-1} = bK$. 这说明陪集 $bK \in Z/K$ 在 P 的共轭作用下稳定. 于是 P 共轭作用于 bK. 由于 $|P|$ 是 p 的幂, $p \nmid |bK|$, 故 bK 上有在 P 作用下的不动点, 即

$$bK\bigcap C_Z(P) \neq \varnothing.$$

取 $$a = bk \in bK\bigcap C_Z(P).$$

由于 $$bk \in C_Z(P) \subseteq H \subseteq \mathrm{Ker}\lambda.$$

故 $$1 = \lambda(bk) = \lambda(b)\lambda(k) = \lambda(b).$$

由 $b \in Z$ 的任意性知: $Z \subset \mathrm{Ker}\lambda$. □

(7.2.7) 定理 *设 G 是 p 拟初等群. 则每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$ 可表为有限和*

$$\chi = \sum_i a_i \lambda_i^G,$$

这里 λ_i 是 G 的某初等子群 H_i 的线性特征标, $a_i \in \mathbb{Z}$.

证 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. 分两种情形讨论.

(a) 设 $\chi(1) > 1$. 由定理 (7.2.5) 知: 存在 G 的子群 H' 及 H' 的线性特征标 ψ 使 $\chi = \psi^G$. 在 $|G|$ 上运用归纳法知 ψ 关于 p 拟初等群 H' 满足定理的结论. 于是由诱导表示的传递性知: χ 关于 p 拟初等群 G 也满足定理的结论.

(b) 现设 $\chi(1) = 1$, 即 χ 是 G 的线性特征标. 令 $H = WP \leqslant G$ 为引理 (7.2.6) 之前定义的 p 初等子群. 记 $\eta = \chi_H$. 则由定理 (5.2.4) 知:

$$(\chi, \eta^G) = 1.$$

设 χ' 是 η^G 的某线性分量. 由定理 (5.2.4) 知 χ_H 为 χ'_H 的分量. 通过次数的比较推出

$$\chi'_H = \chi_H.$$

这说明 $\chi'' = \chi'\chi^{-1}$ 是 G 的线性特征标使得 $H \subset \mathrm{Ker}\chi''$. 据引理 (7.2.6) 推出: χ'' 是 G 的单位特征标. 即

$$\chi' = \chi.$$

故 η^G 有唯一的线性分量. 写

$$\eta^G = \chi + \theta,$$

其中 θ 是 G 的非线性特征标的和. 由 (a) 知: θ 为从 G 的初等子群的线性特征标诱导而得的特征标的整线性组合. 由于 η 是 H 的线性特征标, 故

$$\chi = \eta^G - \theta$$

满足定理结论. □

定理 (7.2.1) 的证明 这可由定理 (7.2.4), (7.2.7) 与诱导表示的传递性推出. □

作为 Brauer 定理 (7.2.1) 的应用, 下面要导出广义特征标的 Brauer 刻画.

令 $\mathrm{cf}(G)$ 为 G 上 F 值类函数集合, $\mathrm{Irr}_F G = \{\chi_i | 1 \leqslant i \leqslant s\}$. 令 $H \leqslant G$. 则限制映射

$$\mathrm{Res}_H^G : \mathrm{cf}(G) \longrightarrow \mathrm{cf}(H),$$
$$\chi \longmapsto \chi_H$$

与诱导映射

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{cf}(H) \longrightarrow \mathrm{cf}(G),$$
$$\psi \longmapsto \psi^G$$

都是 F 线性的, 且有

$\psi^G\chi = (\psi\chi_H)^G$, $\forall \psi \in \mathrm{cf}(H)$ 与 $\chi \in \mathrm{cf}(G)$ (见 §5.2 习题 3).

(7.2.8) 定理 (广义特征标的 Brauer 刻画) 设 $\varphi \in \mathrm{cf}(G)$. 则

$$\varphi \in \mathrm{ch}(G) \iff \text{对于 } G \text{ 的每个初等子群 } H, \text{ 有 } \varphi_H \in \mathrm{ch}(H).$$

证 记 $\mathrm{ch}(G)' = \{\varphi \in \mathrm{cf}(G) | \varphi_H \in \mathrm{ch}(H), \forall$ 初等子群 $H \leqslant G\}$. 则 $\mathrm{ch}(G)'$ 是 $\mathrm{cf}(G)$ 的子环, 且 $\mathrm{ch}(G) \subseteq \mathrm{ch}(G)'$. 设 ψ 是 G 的某初等子群 H 的特征标. 令 $\chi \in \mathrm{ch}(G)'$. 则 $\chi_H \in \mathrm{ch}(H)$. 于是

$$\psi^G\chi = (\psi\chi_H)^G \in (\mathrm{ch}(H))^G \subseteq \mathrm{ch}(G),$$

这里 $(\mathrm{ch}(H))^G = \{\varphi^G | \varphi \in \mathrm{ch}(H)\}$. 由定理 (7.2.1) 推出 $\mathrm{ch}(G)$ 是 $\mathrm{ch}(G)'$ 的理想. 故由 $1_G \in \mathrm{ch}(G)$ 推出

$$\mathrm{ch}(G)' = \mathrm{ch}(G). \qquad \square$$

接着要叙述分裂域的 Brauer 定理.

设 m 是群 G 的指数. 令 $\Lambda^{(m)}$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上 m 次单位根的分圆域. 大致在 1900 年左右, Maschke 曾猜想: $\Lambda^{(m)}$ 是 G 的分裂域. 直到 1945 年, Brauer 才用模表示的理论第一次证实了这一猜想. 这就是分裂域的 Brauer 定理. 其后, Brauer 建立了诱导特征标定理 (7.2.1), 并发现分裂域的定理不过是该定理的一个简单推论. 我们将采用后一途径来证明分裂域的 Brauer 定理.

让我们简单回忆一下群 G 的分裂域的概念. 称 $(\rho, V) \in R_F(G)^+$ 是**绝对不可约的**, 如对于任何扩域 $K \supseteq F$, G 的表示 ρ^K 都是不可约的. 如 G 在域 F 上的每一个不可约表示都是绝对不可约的, 则称 F 为 G 的**分裂域**. 我们已经证明: F 是 G 的分裂域当且仅当 $F[G]$ 是形如 $M_n(F)$ 的矩阵代数的直和.

(7.2.9) 定理 *设 m 是群 G 的指数, 则 m 次单位根的分圆域 $\Lambda^{(m)}$ 是 G 的分裂域.*

证 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 由命题 (4.5.1), 我们只要证

$$\chi \in \mathrm{Irr}_{\Lambda^{(m)}}G.$$

由定理 (7.2.1) 推知: χ 为形如 λ^G 的特征标的整线性组合, 这里 λ 是某 $H \leqslant G$ 的线性特征标. $\forall h \in H$, 有 $h^m = 1$, 故 $\lambda(h)^m = 1$. 这说明 $\lambda(h) \in \Lambda^{(m)}$. 因此 λ^G 是 G 的 $\Lambda^{(m)}$ 特征标. 于是可写

$$\chi = \sum_j k_j \varphi_j,$$

这里 $\varphi_j, \forall j$, 是 G 的两两不等价的不可约 $\Lambda^{(m)}$ 特征标, 且 $k_j \in \mathbb{Z}$. 我们有

$$1 = (\chi, \chi) = \sum_j k_j^2 (\varphi_j, \varphi_j).$$

由于 (φ_j, φ_j) 都是正整数, 及 χ 是 G 的特征标. 故存在某 t, 使

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{如 } j = t, \\ 0, & \text{如 } j \neq t, \end{cases}$$

这说明 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\Lambda^{(m)}}G$. 因此 $\Lambda^{(m)}$ 是 G 的分裂域. □

§7.3 Brauer 定理的一个逆定理

仍用 $\mathrm{ch}(G)$ 记 $\mathrm{ch}_F(G)$, 这里 $F \subseteq \mathbb{C}$. 我们已经证明了

$$\mathrm{ch}_{\mathscr{F}}(G) = \mathrm{ch}(G),$$

这里 $\mathscr{F} = \{H_i\}_{i \in I}$ 是 G 的初等子群的集合. 该等式意味着

$$\mathrm{ch}(G) = \sum_{i \in I} (\mathrm{ch}(H_i))^G. \tag{1}$$

现在要证明 Green 的一个定理, 它断言: 若 G 的子群族 $\mathscr{T}$ 满足 $\mathrm{ch}(G) = \sum_{T \in \mathscr{T}} (\mathrm{ch}(T))^G$, 则 G 的每个初等子群被包含在某 $T \in \mathscr{T}$ 的共轭子群中. 于是在这个意义上, 初等子群族是满足条件 (1) 式的最小子群族.

(7.3.1) 引理 *设 $R = \mathbb{Z}[\varepsilon]$, 这里 ε 是 $|G|$ 次单位原根. 设 p 是素数. 考虑 G 的 p 初等子群 $\langle x \rangle P$, 这里 x 是 G 的 p' 元素, P 是 $C_G(x)$ 的 Sylow p 子群. 设 $H \leqslant G$ 满足 $\langle x \rangle P \nleqslant_G H$, 并设 $\psi \in \mathrm{ch}(H)$ 在 R 中取值. 则 $\psi^G(x) \in pR$.*

证 令 $\mathscr{C}$ 为 G 的含 x 的共轭类. 由 §5.1 的 (5) 式推知

$$\psi^G(x) = \frac{|C_G(x)|}{|H|} \sum_{y \in \mathscr{C} \bigcap H} \psi(y).$$

令 $\{\mathscr{D}_1, \cdots, \mathscr{D}_t\}$ 为 $\mathscr{C} \bigcap H$ 中所含的相异 H 共轭类的集合 (允许为空集). 令 $h_i \in \mathscr{D}_i, 1 \leqslant i \leqslant t$. 则 h_i 的 H 共轭元个数等于

$$|\mathscr{D}_i| = [H : H \bigcap C_G(h_i)].$$

于是

$$\psi^G(x) = \frac{|C_G(x)|}{|H|} \sum_{i=1}^{t} |\mathscr{D}_i| \psi(h_i) = \sum_{i=1}^{t} a_i \psi(h_i),$$

这里 $a_i = \dfrac{|C_G(h_i)|}{|H \bigcap C_G(h_i)|}, 1 \leqslant i \leqslant t$ (注意我们用到这样的事实: 每个 h_i 都 G 共轭于 x). 于是每个 a_i 都是整数. 现只要证明 $p|a_i$, $\forall i$.

设存在某 i 使 $p \nmid a_i$. 令 $x = h_i^z$, 这里 $z \in G$. 由 $p \nmid a_i$ 知 $|C_G(h_i)|$ 与 $|H \bigcap C_G(h_i)|$ 有相同的 p 部分. 故 $H \bigcap C_G(h_i)$ 的 Sylow p 子群 P_i 也是 $C_G(h_i)$ 的 Sylow p 子群. 我们有 $\langle h_i \rangle P_i \subseteq H$. 又由 $h_i^z = x$ 推出 $\langle h_i \rangle^z = \langle x \rangle$. 进而, P_i^z 是 $C_G(h_i^z)$ 的 Sylow p 子群, 也即 $C_G(x)$ 的 Sylow p 子群. 但 P 是 $C_G(x)$ 的 Sylow p 子群. 故 $P_i^z =_{C_G(x)} P$. 因而 $\langle x \rangle P_i^z =_G \langle x \rangle P$. 但

$$(\langle h_i \rangle P_i)^z = \langle x \rangle P_i^z,$$

故 $\langle x \rangle P \leqslant_G H$, 这与假设矛盾. 于是每个 a_i 必须是 p 的倍数, 即 $\psi^G(x) \in pR$. □

(7.3.2) 定理 (Green) *令 $\mathscr{T}$ 为 G 的使 $\mathrm{ch}_{\mathscr{T}}(G) = \mathrm{ch}(G)$ 的子群族, 则 G 的每个初等子群属于 $\mathscr{T}$ 中某子群的共轭子群.*

证 令 $\langle x \rangle P$ 为 G 的 p 初等子群, 这里 x 为 p' 元素, P 为 p 群. 如 $\langle x \rangle P$ 不是任何属于 $\mathscr{T}$ 的子群的共轭子群. 则由引理 (7.3.1) 推出

$$\varphi(x) \in pR, \quad \forall \varphi \in \mathrm{ch}_{\mathscr{T}}(G).$$

特别, $1_G(x) \in pR$. 但这是不可能的. 故定理得证. □

关于 Brauer 定理的逆的进一步结果, 请参阅 Lorenz 著的 *Die Umkehrung des Satzes von Brauer-Berman-Witt über induzierte Charaktere endlichen Gruppen*, Math. Z.142(1975),167–171 .

习　题

1. 证明: 群 G 是 p 拟初等群 $\Leftrightarrow 1_G$ 不能被写作形状 $\sum_H a_H 1_H^G$, 这里 H 取遍 G 的真子群共轭类的一个代表系, $a_H \in \mathbb{Z}$.

提示 "$\Longrightarrow$" 设 $1_G = \sum_H a_H 1_H^G$, 这里 H 取遍 G 的真子群共轭类的一个代表系. 令 C 为 G 的循环正规 p 补 (即 C 是 G 的循环正规子群, 且 $p \nmid |C|$, $[G:C]$ 是 p 的幂). 取 G 的满足条件 $p \nmid (a_{H_0}[G:H_0])$ 的极小子群 H_0. 令 λ 为 $C/(C \bigcap H_0)$ 的忠实线性特征标. 考虑数 $(a_H(1_H^G)_C, \lambda)$, $\forall H$.

2. 设 $F \subseteq \mathbb{C}, \psi \in \mathrm{ch}_F^+(G)$. 设 $a \in G$ 的阶数等于 m, ξ_m 是 $\mathbb{C}$ 中 m 次单位原根. 证明: 等式

$$\psi(a) = \psi(a^\tau), \quad \forall \tau \in \mathrm{Gal}\ F(\xi_m)/F$$

成立.

3. 令 p 为素数, $F \subseteq \mathbb{C}$. 如果

(a) $H = \langle g \rangle \rtimes K$, 这里 K 是 p 群, 元素 g 的阶数 m 与 p 互素.

(b) $\forall k \in K$, 存在 $\tau \in \mathrm{Gal}\ F(\xi_m)/F$ 使 $k^{-1}gk = g^\tau$, 这里 ξ_m 是 m 次单位原根.

则称 H 为 F **初等群**. 现设 H 是满足以上条件的 F 初等群. 证明: 存在 H 上函数 $\eta = \sum_i a_i\chi_i$, 这里 $\chi_i \in \mathrm{ch}_F^+(H), a_i \in \mathbf{I} \bigcap \mathbb{Q}(\xi_m)$ (回忆 $\mathbf{I}$ 是 $\mathbb{C}$ 中所有代数整数组成的集合), 它满足

$$\eta(g^l) = \begin{cases} m, & \text{如存在 } \sigma \in \mathrm{Gal}\ F(\xi_m)/F \text{ 使 } g^\sigma = g^l, \\ 0, & \text{如否}. \end{cases}$$

提示 定义 $\langle g \rangle$ 上函数 λ 使得

$$\lambda(g^l) = \begin{cases} m, & \text{如存在 } \sigma \in \mathrm{Gal}\ F(\xi_m)/F \text{ 使 } g^\sigma = g^l, \\ 0, & \text{如否}. \end{cases}$$

则可写 $\lambda = \sum_{i=0}^{m-1} c_i\omega_i$, 这里 $c_i \in \mathbb{C}, \omega_i$ 是 $\langle g \rangle$ 的不可约复特征标使 $\omega_i(g^l) = \xi_m^{il}$. 利用 $\{\omega_i\}$ 的正交关系证明 c_i 是 F 中的代数整数, 然后证明: 如 ω_i 与 ω_j 在 F 上伽罗华共轭, 则 $c_i = c_j$. 于是可写

$$\lambda = \sum_{i=1}^{s} d_i\mu_i,$$

这里 μ_i 是 $\langle g \rangle$ 的复特征标使 $F(\mu_i) = F$. 最后要证明: 每个 μ_i 是 H 的某 F 特征标在 $\langle g \rangle$ 上的限制. 为此, 在 $F[\langle g \rangle]$ 上定义 H 的作用使得

$$(xk) \cdot y = xkyk^{-1}, \quad \forall x, y \in \langle g \rangle, k \in K.$$

并把 $F[\langle g \rangle]$ 分解成不可约 $F[H]$ 模的直和:

$$F[\langle g \rangle] \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_s.$$

于是, 适当编排下标可使 $\forall j$, μ_j 恰是 M_j 的特征标在 $\langle g \rangle$ 上的限制.

4. 设 $n = |G|$, ξ_n 为 $\mathbb{C}$ 中 n 次单位原根, $F \subseteq \mathbb{C}$. 令 $a, b \in G$. 若存在 $\tau \in \mathrm{Gal}\ F(\xi_n)/F$ 与 $x \in G$ 使得

$$x^{-1}bx = a^\tau,$$

则称 a 与 b 为 F 共轭元, 记作 $a_{\widetilde{F}}b$. 证明: G 中 F 共轭类的个数等于 $|\mathrm{Irr}_F G|$.

提示 令 $a_1,\cdots,a_t$ 为 G 的 F 共轭类代表系, $\omega=|\mathrm{Irr}_F G|$. 为了证明 $t\leqslant\omega$, 构造 $\langle a_i\rangle$ 上函数 ζ_i 使得

$$\zeta_i(a_i^l)=\begin{cases}m_i, & 如存在\ \sigma\in \mathrm{Gal}\ F\ (\xi_{m_i})/F\ 使\ a_i^\sigma=a_i^l,\\ 0, & 如否.\end{cases}$$

这里 m_i 等于 a_i 的阶数. 证明: $\zeta_1^G,\cdots,\zeta_t^G$ 是 F 线性无关的.

5. 设 $F\subseteq\mathbb{C}$, n 是 G 的指数, $\xi_n\in\mathbb{C}$ 是 n 次单位原根, 令 $R=\mathbf{I}\bigcap F(\xi_n)$, 令 $\mathrm{ch}(F,G,R)$ 为由 G 的 F 特征标的所有 R 线性组合组成的环. 置 $\nu(F,G,R)=\sum\limits_H(\mathrm{ch}(F,H,R))^G$, 这里 H 取遍 G 的所有 F 初等子群. 令 q 为素数, $a\in G$ 为 q' 元素. 证明存在满足下列条件的函数 $\varphi=\varphi_a\in\nu(F,G,R)$:

(a) $\varphi(g)=0$, 如 g 是 q' 元素且 $g\underset{F}{\not\sim}a$.

(b) $\varphi(a)\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$.

提示 令 m 为 a 的阶数. 定义 a 在 G 中的 F 正规化子为

$$N:=\{x\in G|\ 存在某\ \sigma\in \mathrm{Gal}\ F(\xi_m)/F\ 使\ x^{-1}ax=a^\sigma\}.$$

取 N 的 Sylow q 子群 B. 则 $H=\langle a\rangle B$ 是 G 关于 q 的 F 初等子群. 照习题 3 那样构造 $\langle a\rangle B$ 上函数 η. 则 $\eta\in\mathrm{ch}(F,H,R)$. 故 $\eta^G\in\nu(F,G,R)$. 证明 η^G 在非 F 共轭于 a 的 q' 元素上取零值. 由此证明 $q\nmid\eta^G(a)$. 取 $z\in\mathbb{Z}$ 使 $z[N:B]\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. 则 $\varphi=z\eta^G$ 为所要求的函数.

6. 沿用习题 5 的记号. 设素数 p 整除 G 的指数. 则存在函数 $\zeta\in\nu(F,G,R)$ 使得

$$\zeta(g)\equiv 1(\mathrm{mod}\ p),\quad \forall g\in G.$$

提示 利用习题 5 的结果.

7. 设 $F\subseteq\mathbb{C}$, 则 G 的每个 F 特征标有形状

$$\sum a_i\psi_i^G,$$

这里 $a_i\in\mathbb{Z},\psi_i$ 是 G 的 F 初等子群的 F 特征标.

注 以上结果称为**Witt-Berman 定理**, 它是 Brauer 诱导特征标定理的一种推广.

提示 只要证明 $1_G\in\nu(F,G,R)$. 为此只要证明对于 $|G|$ 的每个素因子 p, $t_p1_G\in\nu(F,G,R)$, 这里 $|G|=p^et_p$, $p\nmid t_p$. 令 ζ 为习题 6 中的函数, 则

$$(\zeta(g))^{p^r}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^r),\quad \forall g\in G,\ r=1,2,\cdots.$$

对于充分大整数 r, 有

$$(\zeta(g))^{p^r}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^eR),\quad \forall g\in G.$$

置 $\psi=t_p(1_G-\zeta^{p^r})$. 因 $t_p\zeta^{p^r}\in\nu(F,G,R)$, 故只要证 $\psi\in\nu(F,G,R)$.

8. 设 $G=\langle a\rangle\rtimes P$ 是 F 初等群, 这里 $\langle a\rangle$ 为循环 p' 群, P 为 p 群. 证明:

(a) G 的每个子群是 F 初等群.

(b) $\forall \xi \in \mathrm{Irr}G$, $\xi(1)$ 是 p 的幂, 且存在 G 的子群的某线性特征标 λ 使得 $\xi = \lambda^G$.

(c) 如 $H \leqslant G$, 且 $[G:H]$ 是 p 的幂, 则 $a \in H$.

(d) 如 $H \leqslant G$ 和 $\mu \in \mathrm{Irr}H$ 使得 $\mu^G \in \mathrm{Irr}G$, 则 $[G:H]$ 是 p 的幂, 且 $a \in H$.

提示 对于 (b), 利用 §6.1, 习题 5 与 §5.3, 习题 3 的结果. 对于 (d), 有 $\mu^G(1) = [G:H]\mu(1)$.

第八章　Schur 指标

本章主要考虑这样一个问题: 如 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 则 $\mathbb{C}$ 中怎么样的子域 F 才满足 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$? 如 $F \subseteq \mathbb{C}$ 不是这样的子域, 我们希望规定一个尺度来衡量 χ 偏离 F 特征标的程度.

(8.1) 定义　设 $F \subseteq E$, 这里 E 是 G 的任何分裂域. 给定 $\chi \in \mathrm{Irr}_E G$. 设 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_E G$ 有特征标 χ. 再取 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 使 $\rho \leqslant \eta^E$. 则 ρ 作为 η^E 的分量的重数称为 χ 在 F 上的**Schur 指标**. 记作 $m_F(\chi)$.

注意: 对于如上所给定的特征标 χ, 表示 ρ 与 η 总是存在的, 且它们在等价的意义下唯一 (见推论 (3.2.6) (c) 与 (3.2.9)). 故 $m_F(\chi)$ 是有定义的. 事实上, $m_F(\chi)$ 并不依赖于 E. 如 $L \supseteq F(\chi)$ 是 G 的另一个分裂域, 则由引理 (4.5.3) 知: $\chi \in \mathrm{Irr}_L G$. 易证在域 E 或 L 中计算而得的数 $m_F(\chi)$ 是一样的.

据定理 (4.5.11) (b), 在特征数非零的域上的 Schur 指标总等于 1. 故我们只须考虑当 $\mathrm{char}.F = 0$ 时的情形. 不失一般性, 我们可假设所涉及的域都是 $\mathbb{C}$ 的子域.

关于 Schur 指标的许多重要结果依赖于较深奥的可除代数与数论的知识. 但也有很多结果只需运用初等手段就能得到. 我们先来证明一些简单事实.

(8.2) 命题　设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 与 $F \subseteq \mathbb{C}$. 我们有:

(a) $m_F(\chi) = m_{F(\chi)}(\chi)$.

(b) 设 Φ 是 χ 在 F 上的伽罗华共轭类, 则 $m_F(\chi) \sum_{\lambda \in \Phi} \lambda \in \mathrm{Irr}_F G$.

(c) 如 $\zeta \in \mathrm{ch}_F^+(G)$, 则 $m_F(\chi) | (\zeta, \chi)$.

(d) $m_F(\chi)$ 是使 $m\chi \in \mathrm{ch}^+_{F(\chi)}(G)$ 的最小正整数 m.

(e) $m_F(\chi)$ 是使 $m\chi \in \mathrm{Irr}_{F(\chi)}G$ 的唯一正整数 m.

(f) 如 $F \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$, 则 $m_E(\chi)|m_F(\chi)$.

(g) 如 $F \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$ 与 $[E:F]=n<\infty$, 则 $m_F(\chi)|nm_E(\chi)$.

(h) $m_F(\chi)|\chi(1)$.

证 (a) 可从定理 (4.5.11)(a), (e) 推出. (b) 是定理 (4.5.11) (a), (c) 的推论. 令 η 为特征标等于 $\psi = m_F(\chi)\sum_{\lambda\in\Phi}\lambda$ 的 F 表示, 则 η 是在等价意义下唯一的, 其特征标 ψ 满足 $(\psi,\chi)\neq 0$ 的不可约 F 表示. 由等式 $m_F(\chi)=(\psi,\chi)$ 推出 (c).

现在要证明 (d) 与 (e). 由 (a), 不妨设 $F=F(\chi)$. 令 $\Phi=\{\chi\}$. 上面提到的 $\eta\in\overline{\mathrm{Irr}}_FG$ 有特征标 $m_F(\chi)\chi$. 故推出 (d) 与 (e).

今设 $F\subseteq E\subseteq\mathbb{C}$. 任何 F 特征标必也为 E 特征标, 故 (f) 可从 (b) 与 (c) 推出. 设 $[E:F]=n<\infty$, 则整数

$$n_0=[E(\chi):F(\chi)]=[E:E\bigcap F(\chi)]$$

整除 n. 由于 $m_E(\chi)\chi\in\mathrm{ch}^+_{E(\chi)}(G)$, 据引理 (4.5.8) (c) 知: $n_0m_E(\chi)\chi\in\mathrm{ch}^+_{F(\chi)}(G)$. 故由 (c) 与 (a) 推出 (g).

最后, 令 χ_{reg} 为 G 的正则 F 特征标, 则 $(\chi_{\mathrm{reg}},\chi)=\chi(1)$. 因此 (h) 可从 (c) 推出. □

Schur 指标 $m_F(\chi)$ 也能用群代数的语言来刻画.

设 $F\subseteq\mathbb{C}$. 我们有关于群代数的单分支直和分解:

$$\mathbb{C}[G]=M_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus M_{n_s}(\mathbb{C}),$$
$$F[G]=M_{m_1}(D_1)\oplus\cdots\oplus M_{m_r}(D_r),$$

这里 D_i 是 F 可除代数. 记 $A_i=M_{m_i}(D_i)$.

设 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, ρ 是 G 的相应复表示. ρ 可被认为是 G 的正则复表示在 $\mathbb{C}[G]$ 的某单分支 $M_{n_j}(\mathbb{C})$ 的一个极小左理想 V 上的限制. 显然, 存在唯一的 $i, 1\leqslant i\leqslant r$, 使 $V\subset(A_i)^{\mathbb{C}}$. 此时, 我们有

$$A_iV\neq 0,$$
$$A_jV=0,\quad \forall j\neq i.$$

可见 A_i 由 χ 所唯一确定. 我们称 A_i 为 $F[G]$ 的属于 χ 的**单分支**.

(8.3) 引理 *设 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G, F\subseteq\mathbb{C}$. 设 $A=A_i$ 是 $F[G]$ 的属于 χ 的单分支. 则存在域的 F 同构: $F(\chi)\to Z(A)$.*

证 设 ρ 是 G 的对应于 χ 的复表示. 把 ρ 看作 G 的正则复表示在 $A^{\mathbb{C}}$ 的极小左理想 V 上的限制, 也能把 ρ 看作是 $\mathbb{C}[G]$ 的表示, 且把 $F[G]$ 当作 $\mathbb{C}[G]$ 的 F 子代数. 由 ρ 的不可约性与推论 (1.4.3) 推出

$$\rho(Z(\mathbb{C}[G])) = \mathbb{C}\mathbf{1}_V.$$

设 $\mathscr{C}_1, \cdots, \mathscr{C}_s$ 是 G 的共轭类全体. $K_i = \sum_{g\in\mathscr{C}_i} g$ 是类和. 则 F 空间 $Z(F[G])$ 与 $\mathbb{C}$ 空间 $Z(\mathbb{C}[G])$ 都以 $K_1, \cdots, K_s$ 为基. 易知: $\forall g \in \mathscr{C}_i$, $c_g = \sum_{a\in G} a^{-1}ga$ 是 K_i 的非零倍. 故 F 空间 $Z(F[G])$ 与 $\mathbb{C}$ 空间 $Z(\mathbb{C}[G])$ 都以 $\{c_g | g \in R\}$ 为基, 这里 R 为 G 的共轭类代表元的集合. 由于 $\forall g \in G$, 存在 $\gamma \in \mathbb{C}$ 使 $\rho(c_g) = \gamma\mathbf{1}_V$, 我们有

$$\text{tr.}\rho(c_g) = n\gamma, \tag{1}$$

这里 $n = \chi(1)$. 但

$$\text{tr.}\rho(c_g) = \sum_{a\in G} \text{tr.}\rho(a^{-1}ga) = |G|\chi(g). \tag{2}$$

由 (1) 式与 (2) 式推出

$$\gamma = \frac{|G|}{n}\chi(g).$$

于是

$$\rho(c_g) = \frac{|G|}{n}\chi(g)\mathbf{1}_V.$$

把 $\mathbb{C}$ 代数同态 $\rho : \mathbb{C}[G] \to \text{End}_{\mathbb{C}}V$ 限制为 F 代数同态 $\rho : F[G] \to \text{End}_F V$. 则由 (2) 式推出

$$\rho(Z(F[G])) = F(\chi)\mathbf{1}_V.$$

但由于 $\forall j \neq i$, 有 $\rho(A_j) = 0$. 故

$$\rho(Z(A)) = F(\chi)\mathbf{1}_V.$$

因 $Z(A)$ 是域, 我们得到所要求的从域 $Z(A)$ 到域 $F(\chi)$ 上的 F 同构 λ 使

$$\rho(\alpha) = \lambda(\alpha)\mathbf{1}_V, \forall\alpha \in Z(A).$$ □

设 $F \subseteq \mathbb{C}$ 与 $\chi \in \text{ch}^+_{\mathbb{C}}(G)$. 若 $\chi \in \text{ch}^+_F(G)$, 则称 χ **能在 F 上实现**.

设 $(\rho, V) \in R_{\mathbb{C}}(G)^+$ 有特征标 χ. 则根据定义,

χ 能在 F 上实现 $\iff$ 存在 $\sigma \in R_F(G)^+$ 使 $\sigma^{\mathbb{C}} \sim \rho$

$\iff$ 存在 V 的基 B 使矩阵 $\rho_B(g), g \in G$, 的系数属于 F.

特别, 若 χ 能在 F 上实现, 则恒有 $F = F(\chi)$. 下面我们将给出 Schur 指标的群代数刻画.

(8.4) 定理　设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 与 $F = F(\chi)$. 设 $A = M_n(D)$ 是 $F[G]$ 的属于 χ 的单分支. 则

(a) 存在正整数 d 使 $\dim_F D = d^2$, 且 $d\chi$ 能在 F 上实现.

(b) 如 d' 为正整数使 $d'\chi$ 能在 F 上实现, 则 $d|d'$.

故
$$m_F(\chi) = d.$$

证　(a) 由于 $F = F(\chi)$, 据引理 (8.3) 知 A 是 F 上中心单代数. 于是可除代数 D 也是 F 上中心代数. 由定理 (1.10.5) 知: 存在正整数 d 使 $\dim_F D = d^2$. 这推出 $\dim_F A = n^2d^2$. 因为 A 的任何两个极小左理想作为 A 模是同构的, 故它们作为 F 空间也同构.

把 A 表为极小左理想的直和

$$A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

则 $\forall I \in \{I_i|1 \leqslant i \leqslant n\}$, 有

$$\dim_F I = nd^2,$$
$$\dim_{\mathbb{C}} I^{\mathbb{C}} = nd^2.$$

因为 A 是中心单代数, 所以据推论 (1.10.6), $A^{\mathbb{C}}$ 也是单代数. 于是 $A^{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 的单分支. 由于

$$\dim_{\mathbb{C}} A^{\mathbb{C}} = \dim_F A = n^2d^2,$$

这推出
$$A^{\mathbb{C}} = M_{nd}(\mathbb{C}).$$

令 V 为 $A^{\mathbb{C}}$ 的极小左理想, 则

$$\dim_{\mathbb{C}} V = nd.$$

我们已看到: 在 $A^{\mathbb{C}}$ 中存在一个极小左理想 V 使 G 的正则表示在 V 上的限制表示的特征标是 χ. 令 $I^{\mathbb{C}}$ 是 $A^{\mathbb{C}}$ 的左理想, 它满足 $\dim_{\mathbb{C}} I^{\mathbb{C}} = nd^2$. 故通过维数的比较知: $\mathbb{C}[G]$ 模 $I^{\mathbb{C}}$ 是 d 个同构于 V 的左理想的直和. 令 τ 为 G 的正则 F 表示在 I 上的限制表示, 则

$$\tau^{\mathbb{C}} \leftrightarrow \underbrace{\rho \oplus \cdots \oplus \rho}_{d\text{个项}} \text{(见 §2.4, (1)式)}.$$

这说明 $d\chi$ 能在 F 上实现.

(b) 设 d' 是使 $d'\chi$ 能在 F 上实现的正整数. 则存在 $F[G]$ 模 I' 使 $I'^{\mathbb{C}}$ 作为 $\mathbb{C}[G]$ 模同构于 d' 个 V 的直和 $V^{(d')}$. 因为 $V^{(d')}$ 被 $F[G]$ 的异于 A 的单分支所

零化, 故 I' 也被 $F[G]$ 的这些单分支所零化. 于是存在 A 的极小左理想 I 与正整数 h 使 I' 与 $I^{(h)}$ 为同构的 $F[G]$ 模. 我们有 $\mathbb{C}$ 线性同构:

$$V^{(d')} \cong I'^{\mathbb{C}} \cong (I^{\mathbb{C}})^{(h)} \cong (V^{(d)})^{(h)} \cong V^{(dh)}.$$

这推出 $d' = dh$.

由 (a) 与 (b) 推出 $m_F(\chi) = d$. □

在定理 (8.4) 中可看到: $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 在 $\mathbb{C}$ 的子域 $F = F(\chi)$ 上的 Schur 指标 $m_F(\chi)$ 等于 1 当且仅当存在正整数 m 使 χ 所属的 $F[G]$ 的单分支 A 同构于 $M_m(F)$. 换句话说, χ 能在 $F = F(\chi)$ 上实现当且仅当 $A \cong M_m(F)$.

设域 E 满足 $\mathbb{C} \supset E \supset F = F(\chi)$. 考虑群代数 $E[G]$. 由命题 (8.3) 知: $F[G]$ 的属于 χ 的单分支 A 是 F 上的中心单代数. 故 A^E 是 $E[G]$ 是属于 χ 的单分支. 由定理 (1.5.4) 与 (1.7.5) 知: 存在 F 可除代数 D 与正整数 m 使 $A \cong M_m(D)$. 我们有如下等价条件:

$$\begin{aligned} \chi \text{ 能在 } E \text{ 上实现} &\Longleftrightarrow \text{存在正整数 } n \text{ 使 } A^E \cong M_n(E) \\ &\Longleftrightarrow E \text{ 是 } A \text{ 在 } F \text{ 上的分裂域} \\ &\Longleftrightarrow E \text{ 是 } D \text{ 的分裂域.} \end{aligned}$$

这最后一个等价关系是根据定理 (1.10.5). 特别, 据定理 (1.10.5), 对于 F 上有限维中心可除代数 D 与有限次扩域 E, 我们有

$$E \text{ 是 } D \text{ 在 } F \text{ 上的分裂域} \Longleftrightarrow \text{存在正整数 } r \text{ 与 } M_r(D) \text{ 的 } F \text{ 子代数 } E' \text{ 使 } C_{M_r(D)}(E') = E', E \cong E'.$$

此时, $[E:F] = rd$, 这里 $\dim_F D = d^2$.

由该结果与定理 (8.4) 可立即导出:

(8.5) 定理 *沿用定理 (8.4) 的记号. 设域 E 满足 $\mathbb{C} \supset E \supset F$ 与 $[E:F] < \infty$. 则*

χ 能在 E 上实现 $\Longleftrightarrow$ 存在正整数 r 与 $M_r(D)$ 的 F 子代数 E', 满足:

$$C_{M_r(D)}(E') = E',\ E \cong E'.$$

在上述等价条件成立时, 我们有 $[E:F] = rm_F(\chi)$. □

设 $F \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$, $[E:F] = n < \infty$. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 满足 $F = F(\chi)$. 由命题 (8.2)(g) 知: $m_F(\chi) | nm_E(\chi)$. 特别, 如 $\chi \in \mathrm{Irr}_E G$, 则 $m_E(\chi) = 1$. 于是 $m_F(\chi) | [E:F]$. 我们的目标是找一个满足条件 $\chi \in \mathrm{Irr}_E G$ 的极小扩域 $E \supseteq F$.

(8.6) 定理　设 $\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 与 $F\subseteq \mathbb{C}$ 满足 $F=F(\chi)$. 令 $m=m_F(\chi)$. 则存在 $E\supseteq F$ 使得 $\chi\in \mathrm{Irr}_E G$, 且 $[E:F]=m$.

证　由命题 (8.2)(b) 知: 存在不可约 $F[G]$ 模 V, 它的特征标为 $m\chi$. 令 $D=\mathrm{End}_{F[G]}V$ 为 V 的 $F[G]$ 模自同态环. 则据引理 (1.4.2) 知: D 是可除环. 令 E 为 D 的极大子域. 则 E 作用于 V, 而 V 可当作 E 空间. 因 E 与 G 的作用相交换, 故可把 V 当作 $E[G]$ 模. 现 $\mathrm{End}_{E[G]}V$ 是 E 在 D 内的中心化子. E 的极大性导致 $E=\mathrm{End}_{E[G]}V$. 故由定理 (3.2.3)(a),(c) 知: $E[G]$ 模 V 对应于绝对不可约 E 表示 ρ. 令 τ 为对应于 $F[G]$ 模 V 的 F 表示. 据引理 (4.5.8)知: $\rho\leqslant\tau^E$. 由于 τ 有特征标 $m\chi$ 及 ρ 是绝对不可约的, ρ 的特征标为 χ. 最后, 由引理 (4.5.8)(a) 知: $m=[E:F]$. □

注意: 在上述场合里, 我们能找到从域 E 到域 $\mathbb{C}$ 内的 F 同态. 故如我们添加条件 $E\subseteq\mathbb{C}$, 上面的结论仍然成立. 但如 $F\subseteq L\subseteq\mathbb{C}$, L 是 G 的分裂域, 及 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 满足 $F=F(\chi)$. 则并不总是存在满足下列条件的域 $E: F\subseteq E\subseteq L$, $[E:F]=m_F(\chi)$.

在本节的余下部分, 我们总假设 $F\subseteq\mathbb{C}$. 设 $H\leqslant G,\chi\in\mathrm{Irr}_F(G),\phi\in\mathrm{Irr}_F(H)$. 我们要建立 $m_F(\chi)$ 和 $m_F(\phi)$ 之间的联系.

由命题 (8.2)(c) 和定理 (5.2.4) 可推出:

(8.7) 引理　设 $H\leqslant G,\chi\in\mathrm{Irr}_F(G),\phi\in\mathrm{ch}_F(H)$. 则 $m_F(\chi)$ 整除 (ϕ^G,χ), 或等价地, $m_F(\chi)$ 整除 (ϕ,χ_H).

(8.8) 引理　设 $H\leqslant G,\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G),\phi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$. 则 $m_F(\chi)$ 整除 $m_F(\phi)\cdot[F(\chi,\phi):F(\chi)]\cdot(\phi^G,\chi)$.

证　先设 $F=F(\chi)$. 由引理 (4.5.8) 知: 存在 $\psi\in\mathrm{Irr}_F(H)$ 使得 $(\psi,\phi)>0$. 则由命题 (8.2)(b) 知: $\psi=m_F(\phi)\sum\limits_{\sigma\in\Gamma}\sigma\phi$, 这里 $\Gamma=\Gamma_F(\phi)=\mathrm{Gal}\ (F(\phi)/F)$. 于是,

$$\psi^G=m_F(\phi)\sum_{\sigma\in\Gamma}(\sigma\phi)^G=m_F(\phi)\sum_{\sigma\in\Gamma}\sigma(\phi^G).$$

这推出: $(\psi^G,\chi)=m_F(\phi)\sum\limits_{\sigma\in\Gamma}(\sigma(\phi^G),\chi)$. 因为 $(\phi^G,\chi)\in\mathbb{Z}$ 和 $F(\chi)=F$, 所以

$$\begin{aligned}(\sigma(\phi^G),\chi)&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sigma(\phi^G(g))\chi(g^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sigma(\phi^G(g))\sigma(\chi(g^{-1}))\\&=\sigma\left[\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\phi^G(g)\chi(g^{-1})\right]=\sigma((\phi^G,\chi))=(\phi^G,\chi).\end{aligned}$$

因此,

$$(\psi^G,\chi) = m_F(\phi)\sum_{\sigma\in\Gamma}(\sigma(\phi^G),\chi)$$
$$= m_F(\phi)\cdot|\Gamma_F(\phi)|\cdot(\phi^G,\chi) = m_F(\phi)\cdot[F(\phi):F]\cdot(\phi^G,\chi).$$

由引理 (8.7) 知: $m_F(\chi)$ 整除 $m_F(\phi)\cdot[F(\phi):F]\cdot(\phi^G,\chi)$. 于是, 结论可由等式 $F(\phi)=F(\phi,\chi)$ 推出.

现考虑一般情形. 记 $E=F(\chi)$. 则 $E(\chi)=E$. 由上面的讨论知: $m_E(\chi)$ 整除 $m_E(\phi)\cdot[E(\phi):E]\cdot(\phi^G,\chi)$. 进而, 由关系 $F\subseteq F(\chi)=E$ 和命题 (8.2) (f) 知: $m_E(\phi)|m_F(\phi)$. 由命题 (8.2) (a) 知: $m_E(\chi)=m_F(\chi)$. 这推出: $m_F(\chi)$ 整除 $m_F(\phi)\cdot[F(\chi,\phi):F(\chi)]\cdot(\phi^G,\chi)$. □

考虑 ϕ 是 H 的线性特征标的情形. 此时由命题 (8.2) (h) 得: $m_F(\phi)=1$. 因此由引理 (8.8) 得:

(8.9) 推论 设 $H\leqslant G$, $\chi\in \mathrm{Irr}_F(G)$, λ 是 H 的线性特征标. 则 $m_F(\chi)$ 整除 $(\lambda^G,\chi)\cdot[F(\chi,\lambda):F(\chi)]$.

在推论 (8.9) 里取 $\lambda=1_H$, 则有

(8.10) 推论 设 $H\leqslant G,\chi\in\mathrm{Irr}_F(G)$. 则 $m_F(\chi)$ 整除 $(\chi_H,1_H)$. 进而, $m_F(\chi)$ 整除数集 $\{(\chi_H,1_H)|H\leqslant G\}$ 的最大公因子.

由命题 (8.2)(h) 知: $m_F(\chi)\leqslant\chi(1)$, $\forall\chi\in\mathrm{Irr}_F(G)$. 下面要考虑等号成立的情形.

(8.11) 定义 设 ρ 是群 G 在满足 char. $k\nmid|G|$ 的域 k 上的表示. 如果 $\forall 1\neq g\in G$, 线性变换 $\rho(g)$ 的所有特征值都不等于 1, 则称 ρ 为**无固定点的表示**. 称具有无固定点的表示的群为**无固定点的群**.

(8.12) 定理 (Schur) 设 $\chi\in\mathrm{Irr}_F(G)$ 忠实 (即 χ 是 G 的某忠实表示的特征标), 且 $m_F(\chi)=\chi(1)$. 则 G 是无固定点的群.

证 如果 $\{1\}\neq H\leqslant G$, 则由 χ 是忠实特征标的假设知: $(\chi_H,1_H)<\chi(1)$. 另一方面, 由假设条件和推论 (8.10) 知: $\chi(1)$ 整除 $(\chi_H,1_H)$. 这推出等式 $(\chi_H,1_H)=0$ 对于任何非单位子群 H 都成立.

设 ρ 是 G 的以 χ 为特征标的表示. 对于 $1\neq g\in G$, 记 $H=\langle g\rangle$. 则 $(\chi_H,1_H)$ 是 $\rho(g)$ 的特征值 1 的重数. 由于 $(\chi_H,1_H)=0$, 这推出 1 不是 $\rho(g)$ 的特征值. 因此 G 是无固定点的群. □

(8.13) 推论 设 $\chi\in\mathrm{Irr}_F(G)$ 忠实, 且 $\chi(1)=p$ 是素数. 如果 G 不是无固定点的群, 则 $m_F(\chi)=1$.

证 由推论 (8.10) 知: $m_F(\chi) \in \{1, p\}$. 但由定理 (8.12) 知: $m_F(\chi) \neq p$. 这推出我们的结论. □

由诱导特征标的 Brauer 定理 (7.2.1) 及其推广 (见 §7.3, 习题 7) 可见: 关于群 G 的计算 Schur 指标 $m_F(\chi)$ 的问题可归结为关于 G 的 F 初等子群的相应问题.S.D.Berman 在这个方向上做了很好的工作.

习 题

1. 设 $H \leqslant G$, $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$ 与 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 设 $F \subseteq \mathbb{C}$.

(a) 设 $\chi_H = \varphi$. 证明 $m_F(\chi) | m_F(\varphi)$ 与 $m_F(\varphi) \leqslant [G:H]m_F(\chi)$.

(b) 设 $\varphi^G = \chi$. 证明 $m_F(\varphi) | m_F(\chi)$ 与 $m_F(\chi) \leqslant [G:H]m_F(\varphi)$.

2. 设 $N \lhd G, \varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}N$. 设 $F \subseteq \mathbb{C}$, $H = T_G(\varphi)$. 设 ψ 是 φ^H 的不可约分量, $\chi = \psi^G$. 证明: $m_F(\chi) | [N_G(H):H]m_F(\psi)$.

提示 考虑集合 $\{g \in G | \varphi^g$ 与 φ 在 $F(\chi)$ 上伽罗华共轭$\}$.

3. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G, F \subseteq \mathbb{C}$. 令 $H = G \times \cdots \times G$ 是一些 G 的直积. 令 $\psi = \chi \# \cdots \# \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$. 证明: $m_F(\psi) | m_F(\chi)$.

注 事实上, 如 H 是 $m_F(\chi)$ 个 G 的直积, 则 $m_F(\psi) = 1$. 反之, 如 $m_F(\psi) = 1, [F : \mathbb{Q}] < \infty$, 且 H 是 n 个 G 的直积, 则 $m_F(\chi) | n$.

4. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, $F \subseteq \mathbb{C}$. 如不存在使得 $\chi = \psi^G$ 与 $F(\psi) = F(\chi)$ 的子群 $H \subseteq G$ 与特征标 $\psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H$, 则称 χ 为 F **半本原的**. 现设 χ 是 F 半本原的, $N \lhd G$. 证明: χ_N 的不可约分量在 $F(\chi)$ 上伽罗华共轭.

5. 给定数域 $F \subseteq \mathbb{C}$. 设 $x, y \in G$ 满足: $\theta(x) = \theta(y), \forall \theta \in \mathrm{Irr}_F(G)$. 证明: x 和 y 为 F 共轭.(见 §7.3 习题 4.)

第九章　p 模系统 (K, R, k) 与 Grothendieck 环

由定理 (3.1.1) 知: 当域 F 满足条件 $\mathrm{char}.F \nmid |G|$ 时, 有限群 G 的任何 F 表示都完全可约. 此时, 由 §4.2 知: G 的二个表示等价当且仅当它们的特征标相等. 于是, 群 G 的表示理论可归结为研究 G 的不可约表示乃至不可约特征标. 但是, 当 $\mathrm{char}.F \mid |G|$ 时, 由于 F 表示的完全可约性不满足, 情况会变得很复杂. 此时群 G 的 F 表示理论属于由 R. Brauer 所创立的 **有限群模表示理论范畴**.

我们将用四章篇幅介绍有限群模表示的 Brauer 理论, 该理论将有限群 G 在特征零域上的表示理论与特征 p (这里 $p \mid |G|$) 域上的表示理论联系起来; 也将 G 在特征零域上的特征标理论与 G 的 p 局部结构联系起来. 为此, 先定义 p 模系统 (K, R, k) (见(9.1.2)), 研究 G 在环 K、R、k 上的表示理论及其相互关系. 其中最重要的是 K 既为代数数域 (即有理数域的有限次扩域) 也为 G 的分裂域的情形, 我们将 $K[G]$ 模及其特征标同 $R[G]$ 格 (注意: 在第十二章关于 $R[G]$ 格的定义条件比前三章的有所减弱, 因此不尽相同) 和 $k[G]$ 模的结构, 乃至群 G 的 p 局部结构联系起来.

$R[G]$ 格和 $k[G]$ 模的研究将把我们引入新的境地. 我们用 Brauer 和 Green 的方法研究 $R[G]$ 格, 这条途径将通往有限群的整表示理论. 另一方面, 由于 $k[G]$ 模一般不半单, 半单代数上的表示理论不能被直接用来研究 $k[G]$ 模. 作为替代物, 我们将使用带有根基的 Artin 环的理论, 并用 Grothendieck 环和 Brauer 特征标的语言来表述我们的结果.

§9.1 p 模系统 (K, R, k) 与Grothendieck 环

(9.1.1) 定义 设 G 是指数为 m 的有限群 (见 (4.1.1) 性质6). 如果域 K 含 m 次单位原根, 则称**域 K 关于群 G 充分大**.

在下文中, 当我们简称"**域 K 充分大**" 时, 总设定群 G 已知.

由定理 (7.2.9) 知: 如域 K 关于群 G 充分大, 则 K 是 G 的分裂域.

(9.1.2) 定义 设 p 是整除 $|G|$ 的正素数. 称三元组 (K, R, k) 为 p **模系统**. 如果

(a) R 是离散赋值环 (见 (1.2.11). 故 R 是局部环, 含唯一极大理想(记 $\mathfrak{m}$), 且 $\mathfrak{m}$ 是主理想).

(b) K 是 R 的分式域.

(c) 令 π 为 R 的一个素元, 则 $\mathfrak{m} = R\pi$, 商环 $k = R/\mathfrak{m}$ 是特征 $p > 0$ 的剩余类域.

通常设域 K 的特征为零, 并设 K 关于由 $\mathfrak{m}$ 的幂所定义的拓扑是完备 (complete) 的 (或等价地, 从 R 到射影系 $\{R/\mathfrak{m}^n \mid n > 0\}$ 的射影极限的典范映射是同构).

容易证明: 当域 K 关于群 G 充分大时, 域 k 关于群 G 也充分大(见习题1).

(9.1.3) 定义 $R[G]$ **格** 是指具有有限自由 R 基的左 $R[G]$ 模 (见 §1.8, 习题6). 对于每个 $R[G]$ 格 M, 记 $\overline{M} := M/\mathfrak{m}M = \{\overline{v} := v + \mathfrak{m}M \mid v \in M\}$. 则 $\overline{M}$ 是有限生成的 $k[G]$ 模. 称自然映射 $M \longrightarrow \overline{M}$ 为**模 $\mathfrak{m}$ 约化**. 特别, 当 $M = R$ 时, 有 $\overline{R} = R/\mathfrak{m} = k$.

将 $R[G]$ 格 M 等同于 $1 \otimes_R M \subseteq K \otimes_R M$, 简写 $K \otimes_R M$ 成 KM, 其元素是 M 中元素的 K 线性组合.

记 $G_{p'}$ (或 G_p) 为 G 里所有 p'元素 (或 p 元素) 组成的集合 (见 §1.1).

(9.1.4) 定义 设 A 是域 F 上结合代数, 设 $\mathcal{C}$ 是某左 A 模范畴 (见 §1.11). 令 $\mathcal{F}$ 为由符号 (M) 生成的自由交换(加法)群, 这里 M 取遍 $\mathcal{C}$ 中 A 模同构类的一个代表系. 令 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{F}$ 的由所有形如 $(M) - (L) - (N)$ 的元素生成的子群, 这里 L、M、N 是 $\mathcal{C}$ 中 A 模短正合列 $O \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow O$ 的项 (见 §1.8, 习题2).

如不特别申明, 在本书的余下部分所提到的环上模总设定是有限生成的左模.

称商群 $K_0(\mathcal{C}) := \mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 的 **Grothendieck 群**. 记 (M) 在 $K_0(\mathcal{C})$ 中的像为 $[M]$.

记 ${}_A\mathcal{M}$ (或 $\mathcal{P}(A)$) 为由所有 A 模 (或射影 A 模, 见 §1.8, 习题 6) 组成的范畴. 记 $G_0(A) := K_0({}_A\mathcal{M})$ 和 $K_0(A) = K_0(\mathcal{P}(A))$. 则 $G_0(A)$ 有定义关系式:

$$[M] = [M'] + [M''],$$

这里 $O \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow O$ 是范畴 ${}_A\mathcal{M}$ 里的短正合列: $K_0(A)$ 有定义关系式:

$$[P \oplus P'] = [P] + [P'],\ \forall P, P' \in \mathcal{P}(A)$$

(这因为 $\mathcal{P}(A)$ 里的短正合列都分裂, 见 §1.8, 习题2、6). $G_0(A)$ (或 $K_0(A)$) 的每个元素 x 可表成形状 $[M] - [N]$, 其中 M, N 都是 A 模 (或射影 A 模). 注意: 元素 x 的这种表法一般不唯一.

对于任何 A 模 (或射影 A 模) M, N, 定义

$$[M] \cdot [N] = [M \otimes N].$$

这确定了 $G_0(A)$ (或 $K_0(A)$) 里的乘法运算并使其成为交换环. 因此也称 $G_0(A)$ (或 $K_0(A)$) 为**相应模范畴的 Grothendieck 环**.

我们知道: 对于任何 A 模 M 和射影 A 模 P, A 模 $M \otimes P$ 和 $P \otimes M$ 都是射影的 (见 §1.9, 习题6). 故 $K_0(A)$ 有双边 $G_0(A)$ 模结构.

(9.1.5) 给定 p 模系统 (K, R, k) 和有限群 G, 我们要研究Grothendieck 环 $G_0(K[G])$、$G_0(R[G])$、$G_0(k[G])$、$K_0(R[G])$ 和 $K_0(k[G])$ 及其关系. 注意: 每个 $P \in \mathcal{P}(R[G])$ 必为有限生成的自由 R 模, 因而是 $R[G]$ 格. 当然, $R[G]$ 格不必都是射影 $R[G]$ 模.

(I) 环 $G_0(K[G])$ 和 $G_0(k[G])$

对于交换环 L, 记 $G_0^+(L[G]) = \{[E] \in G_0(L[G]) \mid E为\ L[G]模\}$.

下面设 L 是域.

令 $\overline{\mathrm{Irr}}_L(G)$ 为单 $L[G]$ 模 (即 G 的不可约 L 表示) 同构类的一个代表系.

(9.1.6) 命题 *集合 $\{[E] \mid E \in \overline{\mathrm{Irr}}_L(G)\}$ 形成加法群 $G_0(L[G])$ 的一组 $\mathbb{Z}$ 基.*

证 设 G_0 是以 $\overline{\mathrm{Irr}}_L(G)$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$ 模. 对应 $E \mapsto [E], E \in \overline{\mathrm{Irr}}_L(G)$, 确定了一个加法群同态 $\alpha : G_0 \longrightarrow G_0(L[G])$. 另一方面, 对于 $L[G]$ 模 M 和 $E \in \overline{\mathrm{Irr}}_L(G)$, 记 $l_E(M)$ 为 E 作为 M 的 $L[G]$ 模合成因子的重数; 显然, l_E 是 M 的加性函数. 存在加法群同态 $\beta_E : G_0(L[G]) \longrightarrow \mathbb{Z}$ 使得 $\beta_E([M]) = l_E(M)$, $\forall [M] \in G_0^+(L[G])$. 这些 β_E 确定了唯一的加法群同态:

$$\beta : G_0(L[G]) \longrightarrow G_0$$

使得 $\beta([M]) = \sum_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_L(G)} \beta_E([M])E,\ \forall [M] \in G_0(L[G])$. 由于 α 和 β 互逆. 命题得证. □

(9.1.7) 注意 (a) $G_0^+(L[G])$ 恰为由基元素 $[E], E \in \overline{\mathrm{Irr}}_L(G)$, 的所有非负整线性组合组成的集合. 我们有

$$G_0(L[G]) = \{[E] - [E'] \mid [E], [E'] \in G_0^+(L[G])\}.$$

上述讨论特别适用于 L 等于 p 模系统中的域 K 或 k 的情形. 因为 K 的特征值为零, $K[G]$ 模 E 的特征标 χ_E 早有定义: 它是关于 E 的加性函数. 经 $\mathbb{Z}$ 线性扩充得到从 $G_0(K[G])$ 到 G 上 K 值类函数环 $\mathrm{cf}_K(G)$ 内的 $\mathbb{Z}$ 线性映射, 它将

$$[E] - [E'] \in G_0(K[G]) \quad (\text{这里 } [E], [E'] \in G_0^+(K[G]))$$

映到

$$\chi_E - \chi_{E'} \in \mathrm{cf}_K(G).$$

这个映射给出从 $G_0(K[G])$ 到 G 的广义 K 特征标群 $\mathrm{ch}_K(G)$ (见 §7.2) 上的同构. 我们可将群 $G_0(K[G])$ 和 $\mathrm{ch}_K(G)$ 等同起来：称 χ_x 是元素 $x \in G_0(K[G])$ 的**特征标** (或**广义特征标**).

(b) 我们将在第十章里看到以Brauer 特征标表述的域 k 上的类似结果. 注意：如果 E 和 E' 是二个 $K[G]$ 模使得等式 $[E] = [E']$ 在 $G_0(K[G])$ 里成立. 则 E 和 E' 同构: 这因为 E 和 E' 都是半单的. 但当 p 整除 G 的阶数 $|G|$ 时, 对于 $k[G]$ 模的类似结论不成立. 出现这种情形是由于存在非半单的 $k[G]$ 模.

(9.1.8) 以 $K_0(k[G])$ 和 $K_0(R[G])$ 分别记射影 $k[G]$ 模范畴和射影 $R[G]$ 模范畴的Grothendieck 环. 另一方面, 以 $K_0^+(k[G])$ (或 $K_0^+(R[G])$) 记 $K_0(k[G])$ (或 $K_0(R[G])$) 里所有形如 $[M]$ 的元素的集合, 这里 M 取遍射影 $k[G]$ 模 (或射影 $R[G]$ 模).

在 (9.1.4) 里取 $A = k[G], R[G]$ 得知: $K_0(k[G])$ (或 $K_0(R[G])$) 有双边 $G_0(k[G])$ 模 (或双边 $G_0(R[G])$ 模) 结构 (见 §1.9, 习题6).

(II) 环 $K_0(k[G])$ 的结构

回忆 §1.8, 习题9 里关于射影包和满同态是本质的定义.

(9.1.9) 命题 (a) 每个 $k[G]$ 模 M 都有一个射影包, 该射影包在同构的意义下(这里和下文中, 短语“在同构的意义下” 的意思是“允许相差一个同构映射”)由 M 所唯一确定.

(b) 如果 P_i 是 M_i $(i = 1, \cdots, n)$ 的射影包, 则 $\oplus_{i=1}^n P_i$ 是 $\oplus_{i=1}^n M_i$ 的射影包.

(c) 如果 P 是射影 $k[G]$ 模, 设 E 是其最大的半单 $k[G]$ 商模 (即 E 是 P 的半单 $k[G]$ 商模, 且对于 P 的任何半单 $k[G]$ 商模 E', 存在从 E 到 E' 的 $k[G]$ 模满同态), 则 P 是 E 的射影包.

证 先证明 (a). 可将 M 写成商模形状 L/L_0, 这里 L 是射影 $k[G]$ 模, L_0 是 L 的 $k[G]$ 子模 (由于任何模都是自由模的商模, 我们总可取 L 为自由 $k[G]$ 模). 对于 L_0 的任意 $k[G]$ 子模 N, 令 f_N 为从 L/N 到 $M = L/L_0$ 上的典范 $k[G]$ 模同态. 现令 N 为 L_0 里使得 f_N 是本质 $k[G]$ 模满同态的最小 $k[G]$ 子模. 由于 f_{L_0} 是本质 $k[G]$ 模满同态, 而 $k[G]$ 是Artin 环 (见 §1.7, 习题8), 这种 $k[G]$ 子模 N 必定存在. 令 $P = L/N$. 令 Q 为 L 的这种 $k[G]$ 子模, 它在使典范映射 $\rho : L \longrightarrow P$ 的限制 $\eta = \rho|_Q : Q \longrightarrow P$ 是满射的所有 $k[G]$ 子模里最小. 因为 L 是射影 $k[G]$ 模, 由典范映射 $\rho : L \longrightarrow P = L/N$ 可得到 $k[G]$ 模同态 $q : L \longrightarrow Q$ 使得 $\eta \cdot q = \rho$. 由 Q 的极小性确保等式 $q(L) = Q$ 成立. 记 $N' = \operatorname{Ker} q$. 同态

$$f_{N'} : L/N' \longrightarrow L/L_0$$

可分解为三个 $k[G]$ 模同态的乘积:

$$L/N' \xrightarrow{\sim} Q \longrightarrow P = L/N \longrightarrow L/L_0,$$

这三个都是本质同态. 由关系 $N' \subseteq N$ 及 N 的极小性推出: $N' = N$, 即 $Q \longrightarrow P$ 是同构. 于是, $L = N \oplus Q$. 这证明了: $P = L/N \cong Q$ 是射影 $k[G]$ 模. 由构造知 $f = f_N : P \longrightarrow M$ 是本质 $k[G]$ 模满同态, 即 P 是 M 的射影包.

设 P' 是 M 的另一个射影包, 且 $f' : P' \longrightarrow M$ 是本质 $k[G]$ 模满同态. 因为 P 是射影 $k[G]$ 模, 所以存在 $k[G]$ 模同态 $g : P \longrightarrow P'$ 使得 $f = f'g$. $g(P)$ 在 M 里的像 (通过映射 f') 是 M; 因为 $k[G]$ 模满同态 $f' : P' \longrightarrow M$ 是本质的, 这推出 $g(P) = P'$, 于是 g 是满射. 因为 P' 是射影 $k[G]$ 模, 所以 $S := \operatorname{Ker} g$ 是 P 的直和项, 即 $P \cong S \oplus P'$. 由 $f : P \longrightarrow M$ 是本质满同态知: $S = 0$, 即 $g : P \longrightarrow P'$ 是同构. (a) 得证.

断言 (b)~(c) 的证明较容易, 留作读者练习 (见习题6). □

(9.1.10) 注意 在命题 (9.1.9) (c) 中有 $E = P/\mathfrak{r}P$, 其中 $\mathfrak{r} = \mathrm{Rad}.\, k[G]$ 是 $k[G]$ 的Jacobson 根基 (见引理 (1.6.3)). 这因为任意半单 $k[G]$ 模都被 $\mathfrak{r}$ 所零化, 而 $P/\mathfrak{r}P$ 半单.

(9.1.11) 定义 设 A 是环. 称 A 模 M 是**不可分解**的, 如果 $M \neq 0$, 且 M 不能被表成二个真 A 子模的直和.

由命题 (9.1.9) (b) 知: E 的每个关于单 $k[G]$ 模的直和分解都给出其射影包 P 的相应分解. 这推出

(9.1.12) 推论 (a) 每个射影 $k[G]$ 模都是不可分解射影 $k[G]$ 模的直和, 这个分解在同构意义下唯一. 每个不可分解射影 $k[G]$ 模都是单 $k[G]$ 模的射影包.

(b) 令 P_E 为 $E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 的射影包. 则 $\{[P_E] \mid E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)\}$ 形成 $K_0(k[G])$ 的一组 $\mathbb{Z}$ 基.

(c) 二个射影 $k[G]$ 模 P 和 P' 同构当且仅当等式 $[P] = [P']$ 在 $K_0(k[G])$ 里成立.

由推论 (9.1.12) (c) 知: 如果射影 $k[G]$ 模 P 满足等式

$$[P] = \sum_{E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} n_E [P_E], \text{ 其中 } n_E \in \mathbb{N},$$

则

$$P \cong \bigoplus_{E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} P_E^{n_E},$$

这里 $P_E^{n_E}$ 是 n_E 个 P_E 的直和.

(III) 环 $K_0(R[G])$ 的结构

设 Λ 是交换环. 以下引理给出 $\Lambda[G]$ 模是射影模的判别准则.

(9.1.13) 引理 设 Λ 是交换环, P 是 $\Lambda[G]$ 模. 则 P 是射影 $\Lambda[G]$ 模当且仅当 P 是射影 Λ 模且存在 P 的满足以下条件的 Λ 自同构 u:

$$\sum_{s \in G} s \cdot u(s^{-1}x) = x, \quad \forall\, x \in P. \tag{1}$$

证 如果 P 是射影 $\Lambda[G]$ 模, 则 P 也是射影 Λ 模. 这因为 $\Lambda[G]$ 本身是自由 Λ 模. 反之, 将作为 Λ 模的 P 记作 P_0, 定义 $Q := \Lambda[G] \otimes_\Lambda P_0$. 则 $\Lambda[G]$ 模 Q 是射影的. 恒等映射 $P_0 \longrightarrow P$ 可自然地扩充为 $\Lambda[G]$ 模满同态 $q : Q \longrightarrow P$. 这推出: P 是射影 $\Lambda[G]$ 模当且仅当存在满足等式 $q \cdot v = 1_P$ 的 $\Lambda[G]$ 模同态 $v : P \longrightarrow Q$ (见 §1.8, 习题6). 我们断言: 每个满足等式 $q \cdot v = 1_P$ 的 $\Lambda[G]$ 模同态 $v : P \longrightarrow Q$ 均有形状

$$x \mapsto \sum_{s \in G} s \otimes u(s^{-1}x), \tag{2}$$

其中 $u \in \mathrm{End}_\Lambda(P_0)$. 这因为: v 作为 Λ 模同态有形状

$$x \mapsto \sum_{s \in G} s \otimes v_s(x), \qquad \forall\, x \in P, \tag{3}$$

其中 $v_s \in \mathrm{End}_\Lambda(P_0), \forall s \in G$, 且由关系式 $t \cdot v(x) = v(tx)$ 知:

$$v_{ts}(tx) = v_s(x), \forall\, s, t \in G, x \in P.$$

取 $u = v_1$. 则

$$v_t(x) = u(t^{-1}x), \quad \forall\, t \in G, \quad x \in P. \tag{4}$$

故 (2)式由 (3)—(4)式导出. 断言得证. 显然, 形如 (2) 式的 Λ 模同态 v 满足等式 $q \cdot v = 1_P$ 当且仅当 Λ 自同构 u 满足 (1) 式. 引理得证. □

以下结果熟知而有用 (见Curtis-Reiner [2], vol. I, 引理5.7):

(9.1.14) 引理 (Nakayama) 设 Λ 是Neother 环, M 是 Λ 模, L 是 M 的子模, 满足等式 $L + (\mathrm{Rad}.\Lambda)M = M$. 则 $L = M$, 这里 $\mathrm{Rad}.\Lambda$ 是 Λ 的Jacobson 根基 (见引理 (1.6.3)).

(9.1.15) 引理 设 Λ 是以 $\mathfrak{m}_\Lambda$ 为极大理想的局部 (交换) 环, $k_\Lambda = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda$.

(a) 设 P 是 Λ 自由的 $\Lambda[G]$ 模. 则 P 是射影 $\Lambda[G]$ 模当且仅当 $\overline{P} = P/\mathfrak{m}_\Lambda P$ 是射影 $k_\Lambda[G]$ 模.

(b) 两个射影 $\Lambda[G]$ 模 P 和 P' 同构当且仅当对应的 $k_\Lambda[G]$ 模 $\overline{P}$ 和 $\overline{P'}$ 同构.

证 如果 P 是射影 $\Lambda[G]$ 模, 则 $\overline{P}$ 是射影 $k_\Lambda[G]$ 模. 反之, 如果 $\overline{P}$ 是射影 $k_\Lambda[G]$ 模, 则由引理 (9.1.13) 知: 存在 $\overline{P}$ 的 k_Λ 模自同态 $\overline{u}$ 使得等式 $\sum_{s\in G} s \cdot \overline{u} \cdot s^{-1} = 1_{\overline{P}}$ 成立. 设 P 的 Λ 自同态 u 是 $\overline{u}$ 的提升. 则 $u' = \sum_{s\in G} s \cdot u \cdot s^{-1}$ 满足同余式 $u' \equiv 1_P \pmod{\mathfrak{m}_\Lambda P}$. 因此 u' 是 P 的 Λ 自同构, 且与 G 的作用相交换. 于是 $\sum_{s\in G} s \cdot (uu'^{-1}) \cdot s^{-1} = 1_P$. 这证明了 P 作为 $\Lambda[G]$ 模是射影的. (a) 得证.

设 P 和 P' 是射影 $\Lambda[G]$ 模, 且 $\overline{w} : \overline{P} \longrightarrow \overline{P'}$ 是 $k_\Lambda[G]$ 模同态. 则由 P 是射影 $\Lambda[G]$ 模的假设知 $\overline{w}$ 可提升为 $\Lambda[G]$ 模同态 $w : P \longrightarrow P'$. 此时, 如果 $\overline{w}$ 是同构, 则由引理 (9.1.14) (注意: $\mathrm{Rad}.\Lambda = \mathfrak{m}_\Lambda$) 知 w 也是同构. 这证明了 (b). □

现让我们回到离散赋值环 R.

(9.1.16) 命题 (a) 设 E 是 $R[G]$ 模. 则 E 为射影 $R[G]$ 模当且仅当 E 为自由 R 模且其模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{E} = E/\mathfrak{m}E$ 是射影 $k[G]$ 模.

(b) 如果 M 是射影 $k[G]$ 模, 则 (在同构的意义下) 存在唯一的射影 $R[G]$ 模 E, 其模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{E}$ 同构于 M.

证 结论 (a) 及 (b) 中的唯一性论断由引理 (9.1.13) 和 (9.1.15) 推出. 余下要证明结论 (b) 中的存在性论断. 设 M 是射影 $k[G]$ 模. 对于整数 $n \geqslant 1$, 令 R_n 为商环 $R/\mathfrak{m}^n$. 则 $R_1 = k$, 且 R 是射影系 $\{R_n \mid n \geqslant 1\}$的射影极限. R_n 和 $R_n[G]$ 都是Artin 环. 上节的论据证明了: $R_n[G]$ 模 M 有射影包 P_n, 后者作为 R_n 模是自由的. $k[G]$ 模同态 $\eta_n : P_n \longrightarrow M$ 可分解为典范模同态 $\pi_n : P_n \longrightarrow P_n/\mathfrak{m}P_n$ 和模同态 $\psi_n : P_n/\mathfrak{m}P_n \longrightarrow M$ 的乘积. 由于 M 作为 $k[G]$ 模是射影的, 故存在 $P_n/\mathfrak{m}P_n$ 的 $k[G]$ 子模 M_n' 满足 $M_n' \cong \psi_n(M_n') = M$. M_n' 在 P_n 中的逆像 $P_n' = \pi_n^{-1}(M_n')$ 满足等式 $\eta_n(P_n') = M$. 又因为模同态 η_n 是本质的, 这推出

$P_n' = P_n$, 即 ψ_n 是同构映射. 进而, $\{P_n \mid n \geqslant 1\}$ 是一个射影系, 其射影极限 P 是 R 自由的 $R[G]$ 模, 满足关系 $\overline{P} := P/\mathfrak{m}P \cong M$. 由 (a) 推出 P 是射影 $R[G]$ 模. 这证明了结论 (b) 中的存在性论断. □

(9.1.17) 推论 (a) 每个射影 $R[G]$ 模 P 是一些不可分解射影 $R[G]$ 模 M_i 的直和: $P = \oplus_{i\in I} M_i$ (I 是某指标集); P 的这个分解在同构意义下唯一. 不可分解射影 $R[G]$ 模 M 在同构意义下可由其模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$ 来刻画: $\overline{M}$ 是不可分解射影 $k[G]$ 模 (即单 $k[G]$ 模的射影包).

(b) 两个射影 $R[G]$ 模 P 和 Q 是同构的当且仅当等式 $[P] = [Q]$ 在 $K_0(R[G])$ 里成立.

(c) 模 $\mathfrak{m}$ 约化定义了一个满足等式 $\tau_{\mathfrak{m}}(K_0^+(R[G])) = K_0^+(k[G])$ 的环同构映射 $\tau_{\mathfrak{m}} : K_0(R[G]) \longrightarrow K_0(k[G])$.

根据推论 (9.1.17) (c), 我们可将Grothendieck 环 $K_0(R[G])$ 和 $K_0(k[G])$ 等同起来.

习　题

设 (K, R, k) 是 p 模系统, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想. 设 G 是有限群.

1. 证明: (a) 如果域 K 关于群 G 充分大, 则 K 是群 G 及其所有子群的分裂域.

(b) 如果 K 关于群 G 充分大, 则 k 关于群 G 也充分大.

2. 证明: (a) $k[G]$ 是内射 $k[G]$ 模 (见 §1.8, 习题8).

(b) $k[G]$ 模是射影的当且仅当它是内射的.

(c) 不可分解射影 $k[G]$ 模是单 $k[G]$ 模的内射包 (见 §1.8, 习题10).

3. 令 Λ 为交换环, P 是 Λ 射影的 $\Lambda[G]$ 模 (即 $\Lambda[G]$ 模, 其作为 Λ 模是射影的). 证明以下条件等价:

(a) P 是射影 $\Lambda[G]$ 模.

(b) 对于 Λ 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $(\Lambda/\mathfrak{m})[G]$ 模 $P/\mathfrak{m}P$ 是射影的.

4. (a) 设 B 是 R 代数, 其作为 R 模自由且秩有限. 设 $\overline{u}$ 是 $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B$ 的幂等元. 证明: 存在 B 的幂等元, 其模 $\mathfrak{m}B$ 约化等于 $\overline{u}$.

(b) 令 P 为射影 $R[G]$ 模, $B = \mathrm{End}_G(P)$. 证明:

(i) B 是 R 自由的.

(ii) 令 $\overline{P} = P/\mathfrak{m}P$ 和 $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B$. 则 $\overline{B} \cong \mathrm{End}_G(\overline{P})$.

(iii) $k[G]$ 模 $\overline{P}$ 的直和分解可被提升为 $R[G]$ 模 P 的对应分解.

(c) 利用 (b) 给出命题 (9.1.16) (b) 里存在性结论的另一个证明.

提示 把 M 写成自由 $k[G]$ 模 $\overline{P}$ 的直和项, 将 $\overline{P}$ 提升为自由 $R[G]$ 模, 再利用 (b) 的结论.

5. 设 E 是单 $K[G]$ 模. 证明: E 中每个 $R[G]$ 格 E_1 都不可分解; E_1 不含较小 R 秩的非零 $R[G]$ 子模.

6. 证明命题 (9.1.9) 的结论 (b), (c).

§9.2 对偶, 纯量扩充, 限制和诱导

(9.2.1) $G_0(K[G])$ 上的自对偶性 $G_0(K[G])$ 可被看作由有限生成 $K[G]$ 模同构类所生成的加法群. 对于 $[E],[F]\in G_0^+(K[G])$, 令 $\mathrm{Hom}_{K[G]}(E,F):=\{\phi: E\longrightarrow F\mid \phi$为 $K[G]$模同态$\}$. 置

$$\langle[E],[F]\rangle_K=\dim_K \mathrm{Hom}_{K[G]}(E,F)\quad(\text{有时简记为}\langle[E],[F]\rangle).$$

映射 $([E],[F])\longrightarrow\langle[E],[F]\rangle_K$ 可"$\mathbb{Z}$ 双线性" 地扩充到 $G_0(K[G])$ 上. 这定义了 $\mathbb{Z}$ 双线性型

$$\begin{aligned}G_0(K[G])\times G_0(K[G])&\longrightarrow\mathbb{Z},\\ ([E],[F])&\longmapsto\langle[E],[F]\rangle_K.\end{aligned}$$

由于相异单 $K[G]$ 模关于该双线性型互相正交, 对于 $[E]\in G_0^+(K[G])$, $\langle[E],[E]\rangle_K$ 等于 E 的 $K[G]$ 模自同态空间 $\mathrm{End}_{K[G]}(E)$ 的维数 d_E. 令 $\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 为单 $K[G]$ 模同构类的一个代表系. 则对于 $E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 恒有关系 $d_E\geqslant 1$, 等号成立当且仅当 E 是绝对单 $K[G]$ 模 (即 G 的绝对不可约 K 表示). 当域 K 充分大 (见 (9.1.1)) 时, 每个单 $K[G]$ 模都绝对单. 故以上的双线性型非退化, 由它确定从加法群 $G_0(K[G])$ 到其对偶群的一个同构映射.

(9.2.2) $G_0(k[G])$ 和 $K_0(k[G])$ 之间的对偶 如果 E 是射影 $k[G]$ 模, M 是任意 $k[G]$ 模, 置

$$\langle[E],[M]\rangle_k=\dim_k \mathrm{Hom}_{k[G]}(E,M)\quad(\text{有时简记为}\langle[E],[M]\rangle).$$

它关于 $[E]$ 和 $[M]$ 满足 $\mathbb{Z}$ 双线性 (用到 E 是射影 $k[G]$ 模的性质). 这定义了 $\mathbb{Z}$ 双线性型

$$\begin{aligned}K_0(k[G])\times G_0(k[G])&\longrightarrow\mathbb{Z},\\ ([E],[M])&\longmapsto\langle[E],[M]\rangle_k.\end{aligned}$$

如果 $E,E'\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$, 则有

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(P_E,E')\cong\mathrm{Hom}_{k[G]}(E,E'),$$

这里 P_E是 E 的射影包. 如果 $E\neq E'$, 则 $\langle[P_E],[E']\rangle=0$. 另一方面,

$$\langle[P_E],[E]\rangle=\dim_k \mathrm{End}_{k[G]}(E):=d_E.$$

如前, $d_E=1$ 当且仅当 E 是绝对单 $k[G]$ 模.

设域 k 充分大 (故 k 是 G 的分裂域, 见 (9.1.1)). 则 $d_E=1, \forall E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$. 因此双线性型 $\langle\ ,\ \rangle_k$ 在 $\mathbb{Z}$ 上非退化, $G_0(k[G])$ 的 $\mathbb{Z}$ 基 $\{[E]\mid E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)\}$ 和 $K_0(k[G])$ 的 $\mathbb{Z}$ 基 $\{[P_E]\mid E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)\}$ 关于该双线性型互为对偶.

(9.2.3) 纯量扩充 设 K' 是 K 的扩域. 每个 $K[G]$ 模 E 都可通过纯量扩充变为 $K'[G]$ 模 $K'\otimes_K E$. 由此导出环同态

$$\phi: G_0(K[G])\longrightarrow G_0(K'[G]).$$

我们断言: ϕ 是单射. 这因为: 设 D_E 是由 E 的所有 $K[G]$ 模自同态组成的除环. 张量积 $K'\otimes_K D_E$ 分解成一些矩阵代数 $M_{s_i}(D_i)$ 的直积, 这里 D_i 是由单 $K'[G]$ 模 E_i' 的所有自同态组成的除环. 则 $\phi([E])=\sum_{E_i'\in\overline{\mathrm{Irr}}_{K'}(G)} s_i[E_i']$. 由推论 (3.2.9) 知: 对于不同的 $E,F\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$, $K'[G]$ 模 $K'\otimes_K E$ 和 $K'\otimes_K F$ 没有公共的不可约分量. 因此 ϕ 的单射性可从 $\{[E']\mid E'\in\overline{\mathrm{Irr}}_{K'}(G)\}$ 在 $G_0(K'[G])$ 里的线性无关性导出. 由上面关于 ϕ 的描述可进一步看出: 如果所有的 D_E 都交换, 则 s_i 都等于1. 此时环同态 $\phi: G_0(K[G])\longrightarrow G_0(K'[G])$ 把 $G_0(K[G])$ 映到 $G_0(K'[G])$ 的直和项, 即 ϕ 为分裂嵌入. 如果所有的 $E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 都绝对单, 则 $\phi: G_0(K[G])\longrightarrow G_0(K'[G])$ 是同构.

如果 k' 是 k 的域扩充, 则类似的结果对于环同态

$$G_0(k[G])\longrightarrow G_0(k'[G]) \quad 和 \quad K_0(k[G])\longrightarrow K_0(k'[G])$$

也成立, 情况可能更简单: 单 $k[G]$ 模的自同态环总是交换的, 且在 k 上可离 (见 (1.2.6)). 这点当 k 是有限域时显然, 在一般情形可运用纯量扩充技术来证明. 因此环同态 $G_0(k[G])\longrightarrow G_0(k'[G])$ 总是分裂单射. 类似的结论也适用于环同态 $K_0(k[G])\longrightarrow K_0(k'[G])$: 这因为"纯量扩充" 把 $k[G]$ 模的射影包映到相应 $k'[G]$ 模的射影包.

(9.2.4) 现设 K' 是 K 的有限次扩域. 设 R' 是 K' 的整数环 (即 R 在 K' 中的整闭包), k' 是 R' 的剩余类域. 如果 E 是射影 $R[G]$ 模, 则 $E'=R'\otimes_R E$ 是射影 $R'[G]$ 模. 进而, E' 的模 $\mathfrak{m}'=R'\mathfrak{m}$ 约化 $k'\otimes_{R'}E'$ 同构于

$$k'\otimes_R E=k'\otimes_k(k\otimes_R E).$$

下图

$$\begin{array}{ccc} K_0(R[G]) & \longrightarrow & K_0(R'[G]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_0(k[G]) & \longrightarrow & K_0(k'[G]) \end{array}$$

为交换图, 其中二个垂直的箭头都是同构映射 (见推论 (9.1.17)). 这推出环同态 $K_0(R[G])\longrightarrow K_0(R'[G])$ 是分裂单射.

(9.2.5) 子群的 Grothendieck 环 设 $H \leqslant G$. 我们已定义了关于加法群 $G_0(K[G])$ 和 $G_0(K[H])$ 之间的限制和诱导同态:

$$\mathrm{Res}_H^G: G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(K[H]) \quad 和$$
$$\mathrm{Ind}_H^G: G_0(K[H]) \longrightarrow G_0(K[G]) \qquad (见\ \S5.2, \S7.2).$$

同样的定义适用于 $G_0(k[G])$ 和 $K_0(k[G])$: 通过限制, 每个 $k[G]$ 模 M 可被看成 $k[H]$ 模, 当 M 是射影 $k[G]$ 模时, 它作为 $k[H]$ 模也射影. 在Grothendieck 环的层面上, 我们得到环同态:

$$\mathrm{Res}_H^G: G_0(k[G]) \longrightarrow G_0(k[H]), \quad \mathrm{Res}_H^G: K_0(k[G]) \longrightarrow K_0(k[H]).$$

另一方面, 如果 E 是 $k[H]$ 模, 则 $\mathrm{Ind}_H^G E = k[G] \otimes_{k[H]} E$ 是 $k[G]$ 模. (称为 E 的**诱导模**). 当 E 是射影 $k[H]$ 模时, $\mathrm{Ind}_H^G E$ 是射影 $k[G]$ 模. 因此有加法群同态:

$$\mathrm{Ind}_H^G: G_0(k[H]) \longrightarrow G_0(k[G]), \quad \mathrm{Ind}_H^G: K_0(k[H]) \longrightarrow K_0(k[G]).$$

运用张量积的结合律, 我们在以下每一种情形:

(a) $x \in G_0(K[H])$, $y \in G_0(K[G])$, $\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y \in G_0(K[G])$.

(b) $x \in G_0(k[H])$, $y \in G_0(k[G])$, $\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y \in G_0(k[G])$.

(c) $x \in G_0(k[H])$, $y \in K_0(k[G])$, $\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y \in K_0(k[G])$ (该情形之所以有意义是因为 $K_0(k[G])$ 有 $G_0(k[G])$ 双模结构, 见 (9.1.8)).

都有公式:

$$\mathrm{Ind}_H^G(x \cdot \mathrm{Res}_H^G y) = \mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y.$$

回忆 §7.3, 习题3 里关于 F 初等群 H 的定义. 容易将该定义推广到 F 是 p 模系统 (K, R, k) 里的域 K 的情形 (此时称 H 为 **K 初等群**). 显然, K 初等群都是拟初等群 (见 (1.1.7)).

下面要叙述模 p 情形的Brauer 定理, 其证明将在 (9.4.4) 里给出.

(9.2.6) 定理 (模 p 情形的Brauer 定理) *令 X_K 为由群 G 的所有 K 初等子群组成的集合. 则对于 $H \in X_K$, 由 Ind_H^G 所定义的加法群同态*

$$\mathrm{Ind}_H^G: \bigoplus_{H \in X_K} G_0(k[H]) \longrightarrow G_0(k[G]) \quad 和 \quad \mathrm{Ind}_H^G: \bigoplus_{H \in X_K} K_0(k[H]) \longrightarrow K_0(k[G])$$

都是满射. (*比较定理* (7.2.4).)

当域 K 充分大时, X_K 恰是群 G 的所有初等子群组成的集合. 因此有以下推论:

(9.2.7) 推论 如果域 K 充分大, 则 $G_0(k[G])$ (或 $K_0(k[G])$) 的每个元素都是形如 $\mathrm{Ind}_H^G(y_H)$ 的元素之和, 其中 H 是 G 的初等子群, 而 y_H 属于 $G_0(k[H])$ (或 $K_0(k[H])$).

注意 在 (9.4.4) 里将要给出定理 (9.2.6) 的证明, 其论证的方法也能被借用来证明与Artin 定理相类似的结果 (见定理 (7.1.2)).

(9.2.8) 定理 令 T 为群 G 的由所有循环子群组成的集合. 则加法群同态

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}_H^G : \bigoplus_{H\in T}\mathbb{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} G_0(k[H]) \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} G_0(k[G]),$$

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}_H^G : \bigoplus_{H\in T}\mathbb{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_0(k[H]) \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_0(k[G])$$

都是满射.

习 题

1. 设 E 是 $k[G]$ 模, E^* 是由 E 上所有 k 线性函数组成的对偶模. 定义 E 的 k 子空间 $H^0(G,E) := \{v\in E \mid g(v)=v,\ \ \forall\, g\in G\}$ 和 k 商空间 $H_0(G,E) := E/\langle sx-x \mid x\in E, s\in G\rangle$. 证明:

(a) 如果 E 是射影 $k[G]$ 模, 则

$$\eta : E\to H^0(G,E),$$
$$x\mapsto \sum_{s\in G} sx$$

导出从 $H_0(G,E)$ 到 $H^0(G,E)$ 上的 $k[G]$ 模同构映射.

(b) $H^0(G,E)$ 同构于 $H_0(G,E^*)$ 的对偶空间. 当 E 是射影 $k[G]$ 模时下式成立:

$$\dim_k H^0(G,E) = \dim_k H_0(G,E^*).$$

2. 设 M 是 $k[G]$ 模, E 是射影 $k[G]$ 模. 证明:

$$\dim_k \mathrm{Hom}_G(E,M) = \dim_k \mathrm{Hom}_G(M,E).$$

提示 将 §9.1, 习题4 (b) 的结论用于射影 $k[G]$ 模 $\mathrm{Hom}_k(E,M)$, 观察其对偶模同构于 $\mathrm{Hom}_k(M,E)$.

3. 设 S 是单 $k[G]$ 模, P_S 是其射影包.证明:

(a) P_S 含有同构于 S 的子模. (提示: 将习题2 的结论用于 $E=P_S$ 和 $M=S$ 的情形).

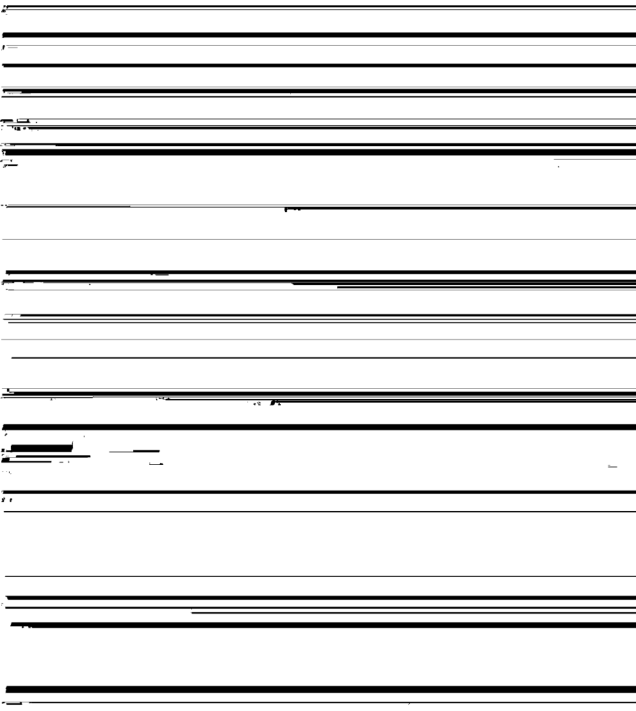
(b) 证明: P_S 同构于 S 的内射包. (提示: 利用习题2 的结论, 见 §1.8, 习题10).

(c) 证明: 如果 S 不是射影 $k[G]$ 模, 则 S 作为 P_S 的合成因子的重数 $\geqslant 2$.

4. 设 E 是半单 $k[G]$ 模, P_E 是其射影包. 证明: E 的对偶模 E^* 的射影包同构于 P_E 的对偶模.

提示 归结到 E 是单 $k[G]$ 模的情形, 并应用习题3 的结论.

§9.3 cde 三角形



于是有

$$\mathfrak{m}E_2 \subseteq \mathfrak{m}E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_1.$$

$k[G]$ 模 $E_1/\mathfrak{m}E_1$ 和 $E_2/\mathfrak{m}E_2$ 以 $E_2/\mathfrak{m}E_1$ 的 $k[G]$ 模合成因子多重集为其公共的合成因子多重集. 于是只要证明: E_1/E_2 和 $\mathfrak{m}E_1/\mathfrak{m}E_2$ 有相同的 $k[G]$ 模合成因子多重集. 由于 $\mathfrak{m}$ 是以 π 为生成元的主理想, 我们有 $\mathfrak{m}E_i = \pi E_i$ $(i = 1, 2)$ 和 $\mathfrak{m}E_1/\mathfrak{m}E_2 = \pi E_1/\pi E_2$. 于是以 π 相乘给出从 E_1/E_2 到 $\mathfrak{m}E_1/\mathfrak{m}E_2$ 的 $k[G]$ 模同构映射. 定理得证. □

(9.3.4) 映射 $[E] \mapsto [\overline{E_1}]$ 可扩充为环同态

$$d : G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(k[G]).$$

称之为**分解同态**. 它将 $G_0^+(K[G])$ 映到 $G_0^+(k[G])$ 内. 定义矩阵

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{ME})_{M\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G), E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)},$$

其中 $\mathbf{D}_{ME}$ 等于 M 作为 E 的 G 稳定 R 格 E_1 的模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{E_1}$ 的合成因子的重数, 称 $\mathbf{D}$ 为群 G 的**分解矩阵**. 我们有

$$d([E]) = \sum_{M\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} \mathbf{D}_{ME}[M], \quad \forall E \in \overline{\mathrm{Irr}}_K(G).$$

(9.3.5) 同态 $e : K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(K[G])$ 纯量扩充函子 $K \otimes_R$ — 给出环同态: $K_0(R[G]) \longrightarrow G_0(K[G])$. 它与典范同构 $\tau_{\mathfrak{m}} : K_0(R[G]) \longrightarrow K_0(k[G])$ (见推论 (9.1.17) (c)) 的逆映射的乘积是环同态:

$$e : K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(K[G]).$$

e 将 $K_0^+(k[G])$ 映到 $G_0^+(K[G])$ 内. 定义矩阵

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{EM})_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G), M\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)},$$

其中 $\mathbf{E}_{EM}$ 等于 E 作为 $K \otimes_R \tau_{\mathfrak{m}}^{-1}(P_M)$ 的合成因子的重数 (见推论 (9.1.17) (c)).我们有

$$e([P_M]) = \sum_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)} \mathbf{E}_{EM}[E], \quad \forall M \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G).$$

(9.3.6) ***cde*** **三角形的基本性质:**

(a) $c = d \cdot e$, 即 $\mathbf{C} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$.

(b) 环同态 d 和 e 关于双线性型 $\langle -, - \rangle$ 互相伴随 (见 (9.2.1)—(9.2.2)):

$$\langle x, d(y)\rangle_k = \langle e(x), y\rangle_K, \qquad \forall\, x \in K_0(k[G]),\ y \in G_0(K[G]).$$

这因为: 可设 $x=[X]$ 和 $y=[K\otimes_R Y]$, 这里 X 是射影 $R[G]$ 模; Y 是 R 自由的 $R[G]$ 模. 则 R 模 $\mathrm{Hom}_{R[G]}(X,Y)$ 也自由, 设其秩为 r. 有典范同构:

$$K\otimes_R \mathrm{Hom}_{R[G]}(X,Y)\cong \mathrm{Hom}_{K[G]}(K\otimes_R X, K\otimes_R Y),$$
$$k\otimes_R \mathrm{Hom}_{R[G]}(X,Y)\cong \mathrm{Hom}_{k[G]}(k\otimes_R X, k\otimes_R Y).$$

于是等式 $\langle e(x),y\rangle_K = r = \langle x, d(y)\rangle_k$ 成立.

(c) *设域 K 充分大. 则 $\mathbf{E}={}^t\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}$ 的转置矩阵) 和 $\mathbf{C}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{D}\cdot{}^t\mathbf{D}$. 特别, $\mathbf{C}$ 是对称矩阵.*

这因为：由 (9.2.1)—(9.2.2) 知：$K_0(k[G])$ (或 $G_0(K[G])$) 和 $G_0(k[G])$ (或 $G_0(K[G])$) 的典范基关于双线性型 $\langle -,-\rangle_k$ (或 $\langle -,-\rangle_K$) 互为对偶. 于是, e 可被视作 d 的转置. 因此结论可由 (a) 推出.

(9.3.7) 为了帮助我们理解前面的知识, 我们将在本节的余下部分考虑 G 为下列特殊群的情形:

(a) p' 群.

(b) p 群.

(c) p' 群和 p 群的直积.

(9.3.8) 命题 *设 G 是 p' 群. 则*

(a) 每个 $k[G]$ 模 (或每个 R 自由的 $R[G]$ 模) 是射影的.

(b) 模 $\mathfrak{m}$ 约化过程导出从集合 $\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 到 $\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 上的双射.

(c) 如将集合 $\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 和 $\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 通过 (b) 中的双射等同起来, 则矩阵 $\mathbf{C},\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ 都是恒等矩阵.

(简言之: 群 G 的表示理论在域 k 上和在域 K 上是相同的.)

证 设 E 是 R 自由的 $R[G]$ 模. 我们能将 E 看作某自由 $R[G]$ 模 L 关于其子模 N 的商模 L/N. 令 $\eta: L\longrightarrow E$ 为典范映射. 由于 E 是 R 自由的, 存在从 E 到 L 的 R 模同态 π 使得 $\eta\cdot\pi = 1_E$; 因为 G 的阶是 R 中的可逆元, 所以可定义 $\pi' := \dfrac{1}{|G|}\sum_{s\in G} s\pi s^{-1}$, 它是从 E 到 L 的 $R[G]$ 模同态, 且有分裂的 $R[G]$ 模短正合列:

$$O\longrightarrow N\longrightarrow L\underset{\pi'}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} E\longrightarrow O.$$

使得 $\eta\pi'=1_E$. 这推出 E 与自由 $R[G]$ 模 L 的子模 $\pi'(E)$ 同构. 因为 $\pi'(E)$ 是 L 的直和项, 所以 E 是射影 $R[G]$ 模. 同样的论证适用于 $k[G]$ 模. 这证明了 (a) 和关于 Cartan 矩阵 $\mathbf{C}$ 是恒等矩阵的事实. 任何 $E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 可被提升为 R 自由的 $R[G]$ 模 E_1. 由 (a) 知: E_1 是射影 $R[G]$ 模, 其模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{E_1}=E_1/\mathfrak{m}E_1$ 等于 E. 取 $M=K\otimes_R E_1$, 则 $d([M])=[E]$. 因为 E 是单 $k[G]$ 模, 所以 M 是不

可约 $K[G]$ 模. 故得到从 $\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 到 $\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 的映射 $E \mapsto M$, 它是 d 的逆映射. 这证明了 (b) 和 (c). □

(9.3.9) 注意 由 D 是恒等矩阵这个事实可知: d 把 $G_0^+(K[G])$ 映到 $G_0^+(k[G])$ 上, 换言之, G 的每个 k 表示都可被提升为 R 表示. 该结果容易被验证.

(9.3.10) 设 G 是 p 群: $|G| = p^n, n \in \mathbb{N}$. 则群 G 在特征 p 的域 k 上仅有的不可约表示是单位表示 (以 k 为表示空间, 见习题 1). 由定理 (1.6.4) 和 (1.7.5) 知: Artin 环 $k[G]$ 是以 k 为其剩余类域的局部环. 单 $k[G]$ 模 k 的射影包是 $k[G]$, 它是群 G 的正则表示 (见 (2.1.5)). 群 $G_0(k[G]) = \langle [k] \rangle$ 和 $K_0(k[G]) = \langle [k[G]] \rangle$ 都同构于 (因而可等同于) 整数加法群 $\mathbb{Z}$. Cartan 同态 $c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 是以 p^n 相乘: $c(x) = p^n x$. 环同态 $d : G_0(K[G]) \longrightarrow \mathbb{Z}$ 对应于维数函数: $d([E]) = \dim_K E$, $\forall E \in G_0^+(K[G])$; 环同态 $e : \mathbb{Z} \longrightarrow G_0(K[G])$ 把整数 m 映到 G 的正则表示 $[K[G]]$ 的 m 倍: $e(m) = m[K[G]]$.

(9.3.11) 设 $G = S \times P$, 这里 S 和 P 分别是 p' 群和 p 群. 我们有 $k[G] = k[S] \otimes_k k[P]$. 则

(a) *$k[G]$ 模 E 半单当且仅当 P 平凡地作用在 E 上.*

证 先设 P 平凡地作用在 $k[G]$ 模 E 上. 由命题 (9.3.8) 知: E (通过限制) 作为 $k[S]$ 模半单, $k[G]$ 模 E 作为 $k[S]$ 模 E 的提升 (S 可被看作 G 的商群, 见 (2.3.1)) 也半单. 为了作反向推理, 不妨设 E 是单 $k[G]$ 模. 由 (9.3.10) 知: E 的由 P 固定元组成的子空间 E' 非零. 由 $P \triangleleft G$ 知: 子空间 E' 为 G 稳定, 故由 E 的单性知: $E' = E$. 因此 P 平凡地作用于 E. □

(b) *$k[G]$ 模 E 射影当且仅当 $E \cong M \otimes_k k[P]$, 这里 M 是某 $k[S]$ 模, $G = S \times P$ 如 (2.3.5) 那样作用在 $M \otimes_k k[P]$ 上.*

证 ($\Longleftarrow$) 任何 $k[S]$ 模 M 既半单又射影 (见命题 (9.3.8) (a)), 它可被唯一地提升为半单 $k[G]$ 模使得 P 平凡作用于其上. 因为 M 和 $k[P]$ 作为 $k[G]$ 模都射影, 所以 $E := M \otimes_k k[P]$ 是射影 $k[G]$ 模.

($\Longrightarrow$) 设 M 是半单 $k[G]$ 模. 由 (a) 知: P 平凡作用于 M. 将 M (通过限制) 看作 $k[S]$ 模, 让 $G = S \times P$ 如 (2.3.5) 那样作用于 $M \otimes_k k[P]$. 则 $M \otimes_k k[P]$ 是射影 $k[G]$ 模. 易见: M 是 $M \otimes_k k[P]$ 的使得 P 平凡地作用于其上的最大 $k[G]$ 商模 (即 $M \otimes_k k[P]$ 的任何被 P 平凡地作用的 $k[G]$ 商模都是 M 的商模). 于是, $M \otimes_k k[P]$ 是半单 $k[G]$ 模 M 的射影包. 但是, 每个射影模都是其最大半单商的射影包. 这说明每个射影 $k[G]$ 模都有形状 $M \otimes_k k[P]$, 其中 M 是某个 $k[S]$ 模. □

(c) *$R[G]$ 模 $\tilde{E}$ 是射影的当且仅当存在某个 R 自由的 $R[S]$ 模 $\tilde{M}$ 使得 $\tilde{E} \cong$*

$\tilde{M} \otimes_R R[P]$.

证 当 $\tilde{M}$ 是 R 自由的 $R[S]$ 模时, $R[G]$ 模 $\tilde{E} = \tilde{M} \otimes_R R[P]$ 是射影的. 反之, 设 $\tilde{E}$ 是射影 $R[G]$ 模. 则 $E = \tilde{E}/\mathfrak{m}\tilde{E}$ 是射影 $k[G]$ 模. 由 (b) 知存在某 $k[S]$ 模 M 使得 $E \cong M \otimes_k k[P]$. 将 M 提升为 $R[S]$ 模 $\tilde{M}$. 则 $\tilde{M}$ 是 R 自由的, 由命题 (9.3.8) 知 $\tilde{M}$ 也是射影 $R[S]$ 模. $R[G]$ 模 $\tilde{M} \otimes_R R[P]$ 作为 $M \otimes_k k[P]$ 的提升而同构于 $\tilde{E}$. □

由性质 (a) 和 (b) 知: 群 $G = S \times P$ 的 Cartan 矩阵是纯量矩阵 p^n, 其中 $p^n = |P|$.

(9.3.12) 例 (a) 设 $G = S_3$, $p = 2$, p 模系统是 $(\mathbb{Q}, R, k)$, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, $R = \left\{\frac{r}{s} \mid r, s \in \mathbb{Z}, 2 \nmid s\right\}$, 令 $\mathfrak{p} = 2R$ 和 $k = R/\mathfrak{p} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 此时有三个单 $\mathbb{Q}[G]$ 模 Z_1 、Z_2 、Z_3, 分别提供群 G 的单位表示、符号表示和 2 维不可约表示 (见 (4.2.6)). 存在 2 个单 $k[G]$ 模 F_1、F_2, 分别提供 G 的单位表示和由 Z_3 通过模 2 约化而得到的 2 维表示. G 的分解矩阵为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) 设 $G = S_4$, $p = 2$, p 模系统 $(\mathbb{Q}, R, k)$ 如 (a) 中所给. 存在 5 个维数分别为 1、1、2、3、3 的单 $\mathbb{Q}[G]$ 模 $Z_1', \cdots, Z_5'$. 令 $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. 则 $K \lhd G$ 和 $G/K \cong S_3$. 单 $\mathbb{Q}[S_3]$ 模 Z_1、Z_2、Z_3 可通过自然映射 $G \longrightarrow G/K \cong S_3$ 被提升为单 $\mathbb{Q}[S_4]$ 模 Z_1'、Z_2'、Z_3' (见 (2.3.1)). 由于群 G 双可迁地作用于集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ (见 §1.1, 习题 3), 据 §5.1, 习题 5 (b) 知: G 在 $\mathbb{Q}^4$ 上的置换表示可分解为单位表示和一个不可约 3 维表示 Z_4' 的直和. G 的另一个不可约 3 维表示为 $Z_5' = Z_4' \otimes Z_2'$, 这里 $Z_2' = \mathrm{sg}$ 是 G 的符号表示 (见 § 3.3, (2)式). G 的正规 2 子群 K 平凡地作用在每个单 $k[G]$ 模上. 因此存在 2 个单 $k[G]$ 模 F_1' 、F_2', 它们分别来自 (a) 中所刻画的 $k[S_3]$ 模 F_1、F_2. G 的分解矩阵为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

习　　题

1. 证明: p 群在特征 p 域上仅有的不可约表示是单位表示.

2. 设 G 是 2 阶群, $\text{char}.k = 2$ 和 $E = K[G]$. 证明: E 含有 G 稳定的 R 格 E_1, 其模 2 约化 $\overline{E}_1$ 要么是同构于 $k \oplus k$ 的半单 $k[G]$ 模; 要么是同构于 $k[G]$ 的非半单 $k[G]$ 模, 这里 k 提供 G 的单位表示.

3. 设 E 是非零 $K[G]$ 模, E_1 是 E 的 G 稳定的 R 格. 证明以下条件等价:

(a) E_1 的模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{E}_1$ 是单 $k[G]$ 模.

(b) E 的每个 G 稳定的 R 格有形状 aE_1, $a \in K^*$.

证明: 当这些等价条件成立时, E 是单 $K[G]$ 模.

4. (J. Thompson) 设 $\mathbb{Z}[G]$ 模 E 作为 $\mathbb{Z}$ 模是自由的, 且秩 $n \geqslant 2$. 设对于每个素数 p, E 的模 p 约化 E/pE 是单 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[G]$ 模.

(a) 证明: 在 E 上存在 $\mathbb{Z}$ 值双线性型 $B(-,-)$ 使得 $B(x,x) > 0$, $\forall 0 \neq x \in E$.

(b) 设 B 如 (a) 中所取. 将 B 线性扩充到 $\mathbb{Q}$ 向量空间 $E_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E$. 证明:

(i) 集合 $E' := \{x \in E_{\mathbb{Q}} \mid B(x,y) \in \mathbb{Z}, \forall y \in E\}$ 有形状 $E' = aE$, 这里 $a \in \mathbb{Q}^*$ (提示 按习题 3 那样论证).

(ii) 可选取 B 使其在 $\mathbb{Z}$ 上非退化, 即 $E' = E$.

(iii) 如果 $e_1, ..., e_n$ 是 E 的一组 $\mathbb{Z}$ 基, 则矩阵 $(B(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ 的行列式等于 1.

(c) 设 B 如 (b)(ii) 中所选. 证明: 存在 $e \in E$ 使满足条件: $B(x,x) \equiv B(e,x) \pmod 2$ 和 $e \equiv g(e) \pmod{2E}$, $\forall x \in E, g \in G$. 进而证明: $e \equiv 0 \pmod{2E}$, 即二次型 $B(x,x)$ 在 E 上只取偶数值.

(d) 由 (c) 可推出: $n \equiv 0 \pmod 8$ (提示: 利用事实: 每个取偶整数值且行列式等于 1 的正定二次型必有可整除 8 的 $\mathbb{Z}$ 秩).

(e) 证明: 型 E_8 的 Coxeter 群的反射表示有以上性质 (a)—(d) (提示 参阅 Bourbaki [2], Ch. VI, §4, no.10).

5. 证明例 (9.3.12) 里所叙述的结论. 特别要证明: 如果 M 是 (9.3.12) (b) 中单模 Z_4' 或 Z_5' 里的 $R[G]$ 格, 则 $\overline{M}$ 不是单 $k[G]$ 模.

6. 设 $p = 3$, p 模系统 $(\mathbb{Q}, R, k)$ 中的 R 等于 $\left\{\frac{r}{s}\middle| r, s \in \mathbb{Z}, 3 \nmid s\right\}$, $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 找出对称群 S_3 、S_4 的分解矩阵.

7. 找出一个 p 模系统 (K, R, k) 和有限群 G 的例子, 使得存在一个单 $K[G]$ 模 V 及其所含的二个 $R[G]$ 格 M_1 和 M_2 , 它们的模 p 约化 $\overline{M}_1$ 、$\overline{M}_2$ 作为 $k[G]$ 模不同构.

8. 设 $Q_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 是四元数群. 设 $\mathbb{H} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}j \oplus \mathbb{Q}k$ 是由 Q_2 在 $\mathbb{Q}$ 上生成的除环. 则 Q_2 在 $\mathbb{H}$ 上的左乘作用使得 $\mathbb{H}$ 成为 $\mathbb{Q}[Q_2]$ 模 (见 §2.3, 习题 5). 设 K 是 Q_2 在 $\mathbb{Q}$ 上的有限次分裂域.

(a) 证明：在 $G_0(K[Q_2])$ 里有等式 $[K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{H}] = 2[W]$, 这里 W 是满足条件 $\dim_K W = 2$ 的 $K[Q_2]$ 模.

(b) 证明：在纯量扩充映射下, $G_0(\mathbb{Q}[Q_2])$ 在 $G_0(K[Q_2])$ 里的像不是 $G_0(K[Q_2])$ 的 $\mathbb{Z}$ 直和项.

§9.4 同态 d、e、c 的性质

本节将分别研究同态 d、e、c 的性质. 要证明：同态 d 是满射 (见定理 (9.4.1)); 同态 e 是分裂单射 (见定理 (9.4.6)) ; 同态 c 是单射 (见推论 (9.4.10)). 要刻画同态 c 的像和余核 (见定理 (9.4.9) 和推论 (9.4.10)). 还要完成定理 (9.2.6) 的证明 (见 (9.4.4)).

(9.4.1) 定理 *环同态 $d: G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$ 是满射.*

(9.4.2) 注意 (a) 定理 (9.4.1) 可应用于如下特殊情形: $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, K 为 p 进 (即 p-adic) 域

$$\mathbb{Q}_p = \{\pm p^r(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_sp^s + \cdots) \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a_i < p, \forall i\};$$

环 R 为 p 进整数环

$$\mathbb{Z}_p = \{\pm(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_sp^s + \cdots) \mid s \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a_i < p, \ \forall\, i\}.$$

(b) 由定理 (9.4.1) 知: 群 G 的每个 k 广义表示均可被提升到特征零的域上, 即提升为 Grothendieck 环 $G_0(K[G])$ 里的元素. 对于定理 (9.4.1), 先考虑 G 是 K 初等群的情形.

(9.4.3) 定理 *设 $G = P \ltimes C$ 是 l 拟初等群, 其中 l 是素数, P 是 l 群, C 是 l' 循环群. 则每个单 $k[G]$ 模 E 可被提升为 $R[G]$ 模, 换言之: E 是某 R 自由的 $R[G]$ 模的模 $\mathfrak{m}$ 约化 (这推出: d 将 $G_0^+(K[G])$ 映到 $G_0^+(k[G])$ 上).*

证 先设 $l \neq p$. 令 C_p 为 C 的 Sylow p 子群, 令 E' 为单 $k[G]$ 模 E 的由 C_p 固定元所组成的 k 子空间. 因 C_p 是 p 群, 我们有 $E' \neq 0$ (参见 (9.3.10)). 由于 $C_p \triangleleft G$, 子空间 E' 为 G 稳定. 于是, 由 E 作为 $K[G]$ 模的单性推出: $E' = E$, 这意味着 C_p 平凡地作用在 E 上. 于是 E 上的 G 表示是 G/C_p 表示的提升 (见 (2.3.1)). 因为 G/C_p 的阶数与 p 互素, 所以由命题 (9.3.8) 知 : $k[G]$ 模 E 可被提升为 R 自由的 $R[G]$ 模.

现设 $l = p$. 在 $|G| \geqslant 1$ 上运用归纳法. 因为 C 是 p' 群, 所以 E 作为 $k[C]$ 模半单. 将该模分解成一些 $k[C]$ 模齐次分支 E_α 的直和 (见定理 (6.1.1)):

$$E = \bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha, \qquad \text{这里 } I \text{是某有限指标集}.$$

记 $\Delta := \{E_\alpha \mid E_\alpha \neq 0, \alpha \in I\}$. 由于 E 是单 $k[G]$ 模, 群 G 可迁地置换 Δ. 任取 $E_\beta \in \Delta$, $G_\beta := \{s \in G \mid s(E_\beta) = E_\beta\}$. 则由定理 (6.1.1) (d) 知: E_β 是 $k[G_\beta]$ 模, 且 $E = \mathrm{Ind}_{G_\beta}^G(E_\beta)$. 易见 G_β 是 P 的一个子群与 C 的半直积.

如果 $E_\beta \neq E$, 则 $G_\beta \neq G$. 由 $|G|$ 上的归纳假设知: E_β 可被提升为 R 自由的 $R[G_\beta]$ 模. 于是 E 也可被提升为 R 自由的 $R[G]$ 模. 现设 $E = E_\beta$ 是同一个不可约 $k[C]$ 模的直和. 令 $\rho: k[G] \longrightarrow \mathrm{End}_k(E)$ 为由 E 上 $k[G]$ 模结构所决定的环同态. 由 E 是同一个不可约 $k[C]$ 模的直和与 C 是循环群的事实知: $\rho(k[C]) = k'$ 是 k 的有限次扩域; ρ 在 C 处的限制是群同态 $\phi: C \longrightarrow k'^*$ (这里 k'^* 是由 k' 中非零元素组成的乘法群), 且域 k' 由 $\phi(C)$ 在 k 上生成. 模 E 具有 k' 向量空间的结构. 在 E 中选 P 固定元素 $v \neq 0$; 这种元素的存在性可由 P 是 p 群的事实来保证 (见 §9.3, 习题 1). 对于 $x \in C$, $s \in P$, 记 ${}^s x = sxs^{-1}$. 则

$$\rho(s)(\phi(x) \cdot v) = \phi(sxs^{-1})\rho(s) \cdot v = \phi({}^s x) \cdot v. \tag{1}$$

于是 E 的由 $\{\phi(x) \cdot v \mid x \in C\}$ 所生成的 k' 子空间 $k'v$ 在 C 和 P 的作用下稳定. 所以 $k'v = E$, 即 $\dim_{k'} E = 1$. 我们可建立 k' 向量空间 E 和 k' 之间的同构映射使得 E 的元素 v 对应于 k' 的恒等元. 对于所有 $t \in G$, $\rho(t)$ 是 k 空间 k' 的自同态 σ_t. 对于 $s \in P$, 有 $\sigma_s(\mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_G$. 由 (1) 式知:

$$\sigma_s(\phi(x)) = \phi({}^s x), \quad \forall\, x \in C,$$

进而推出

$$\sigma_s(\phi(x)\phi(x')) = \sigma_s(\phi(x))\sigma_s(\phi(x')), \quad \forall x, x' \in C.$$

因为 k' 由 $\phi(C)$ 在 k 上生成, 我们得到

$$\sigma_s(aa') = \sigma_s(a)\sigma_s(a'), \quad \forall a, a' \in k'.$$

换句话说, σ_s 是域 k' 的 k 自同构, 而映射 $s \mapsto \sigma_s$ 是群同态 $\sigma: P \longrightarrow \mathrm{Gal}\, k'/k$, 后者是域 k'/k 的伽罗华群. 容易定义 E 的提升: 令 K' 为域 K 的非交结扩充 (unramified extension) 使得 K' 的 R 整数环 R' 的剩余域是 k'. 典范同构

$$\mathrm{Gal}\, K'/K \cong \mathrm{Gal}\, k'/k$$

给出 P 在 K' 和 R' 上的作用 (通过 σ). 另一方面, 群同态 $\phi: C \longrightarrow k'^*$ 被唯一提升到 (利用乘法代表元) 群同态 $\tilde{\phi}: C \longrightarrow R'^*$, 后者给出 C 在 R' 上的乘法作用. 由唯一性可立刻导出

$$\sigma_s(\tilde{\phi}(x)) = \tilde{\phi}({}^s x), \quad \forall\, x \in C, s \in P.$$

C 和 P 在 R' 上的作用确定 G 在 R' 上的作用. R' 上相应的 $R[G]$ 模结构即为所要求的对单 $k[G]$ 模 E 的提升. □

现在是证明定理 (9.2.6) 的合适时机: 一方面, 我们已经定义了证明该定理所要用到的映射 d; 另一方面, 即将给出的对定理 (9.4.1) 的证明里要用到定理 (9.2.6) 的结论.

(9.4.4)　定理 (9.2.6) 的证明　令 1_K (或 1_k) 为环 $G_0(K[G])$ (或 $G_0(k[G])$) 的乘法单位元. 我们有 $d(1_K) = 1_k$. 据 Witt-Berman 定理 (见 §7.3, 习题 7) 知有等式:

$$1_K = \sum_{H \in X_K} \mathrm{Ind}_H^G(x_H),$$

这里 $x_H \in G_0(K[H])$. 运用映射 d, 并利用 d 与 Ind_H^G 相交换的事实, 可得到关于 1_k 的类似公式:

$$1_k = \sum_{H \in X_K} \mathrm{Ind}_H^G(x'_H),$$

这里 $x'_H = d(x_H) \in G_0(k[H])$. 对于 $y \in G_0(k[G])$ (或 $y \in K_0(k[G])$), 我们通过乘法得到:

$$y = 1_k \cdot y = \sum_{H \in X_K} \mathrm{Ind}_H^G(x'_H) \cdot y = \sum_{H \in X_K} \mathrm{Ind}_H^G(x'_H \cdot \mathrm{Res}_H^G y),$$

这证明了本定理. □

定理 (9.4.1) 的证明　由定理 (9.2.6) 知: $G_0(k[G])$ 由各种 $\mathrm{Ind}_H^G(G_0(k[H]))$ 所生成, 这里 H 取遍 G 的 K 初等子群. 因为 d 与 Ind_H^G 相交换, 所以只要对于每个 K 初等子群 H 证明等式 $G_0(k[H]) = d(G_0(K[H]))$ 即可. 而后者可由定理 (9.4.3) 推出. □

(9.4.5) 注意　(a) 当域 K 充分大时, 为了证明定理 (9.4.1), 我们只需考虑 G 是初等群的情形, 即 $G = C \times P$. 如果定理 (9.4.3) 里的群换成初等群, 则该定理的证明会变得非常简单: 群 P 平凡地作用于单模 E, 后者作为单 $k[C]$ 模不难被提升.

(b) 当 (K, R, k) 是 p 模系统但 K 不完备时, 分解映射 $d : G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$ 不总是满射 (见习题 1). 但是, 如果此时域 K 充分大, 则仍能保证 d 是满射. 这因为: 令域 $\hat{K}$ 为 K 的完备化. 则容易证明: 由 $M \mapsto \hat{K} \otimes_K M$ 所确定的同态映射 $G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(\hat{K}[G])$ 是同构. 将定理 (9.4.1) 应用于域 $\hat{K}$ 就能得到 d 是满射的结论.

(9.4.6) 定理　*同态 $e : K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(K[G])$ 是分裂单射.*

证　当域 K 充分大时, e 是 d 的转置 (见 (9.3.6) (c)). 因为 d 是满射 (见定理 (9.4.1)), 所以 e 是分裂单射. 在一般情形下, 设 K' 是域 K 的充分大有限次扩域, R' 是 K' 的 R 整数环, k' 是 R' 的剩余类域, 则 k' 也是 k 的充分大有限

次扩域. 考虑交换图:

$$\begin{array}{ccc} K_0(k[G]) & \xrightarrow{e} & G_0(K[G]) \\ \eta_1\downarrow & & \eta_2\downarrow \\ K_0(k'[G]) & \xrightarrow{e'} & G_0(K'[G]), \end{array}$$

这里 η_1,η_2 是纯量扩充映射, 由 (9.2.3) 知它们都是单射, 且 η_1 是分裂单射. 因为 e' 是分裂单射, 所以 $e'\eta_1$ 也是分裂单射, 即 $\eta_2 e$ 是分裂单射. 于是, e 也是分裂单射. □

我们同时也证明了以下结论:

(9.4.7) 推论 对于域 K 的每个扩域 K', 环同态

$$\eta_2 e : K_0(k[G]) \xrightarrow{e} G_0(K[G]) \xrightarrow{\eta_2} G_0(K'[G])$$

是分裂单射.

映射 e 的单射性等价于:

(9.4.8) 推论 令 P 和 P' 为射影 $R[G]$ 模. 如果 $K[G]$ 模 $K\otimes_R P$ 和 $K\otimes_R P'$ 同构, 则 P 和 P' 作为 $R[G]$ 模也同构.

证 由于 $K_0(R[G])\cong K_0(k[G])$, 如果 P 与 P' 都是射影 $R[G]$ 模, 则 $K\otimes_R P$ 和 $K\otimes_R P'$ 可被分别看作 $[P]$ 和 $[P']$ 在同态 e 下的像. 于是, 据定理 (9.4.6) 知: 由 $[K\otimes_R P]=[K\otimes_R P']$ 可推出 $[P]=[P']$, 即 $P\cong P'$. □

以 $|G|_p$ 记整除 $|G|$ 的最高次 p 幂.

(9.4.9) 定理 设 $|G|_p=p^n$. 则 $G_0(k[G])$ 的每个可被 p^n 整除的元素都属于 Cartan 映射 $c: K_0(k[G])\longrightarrow G_0(k[G])$ 的像.

证 我们必须证明: 环同态 $c : K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$ 的余核 $G_0(k[G])/c\ (K_0(k[G]))$ 被 p^n 所零化. 分二种情形讨论:

(a) 设域 K 充分大. 由推论 (9.2.7) 知: 环 $G_0(k[G])$ 由 $\mathrm{Ind}_H^G(G_0(k[H]))$ 所生成, 这里 H 取遍 G 的所有初等子群. 所以只要讨论 G 是初等群的情形, 记 $G=S\times P$, 这里 S 与 P 分别是 p' 群和 p 群. 我们在 (9.3.11) 里看到: 群 G 的 Cartan 矩阵是纯量阵 p^n. 所以定理在这种情形下成立.

(b) 一般情形. 令 K' 为域 K 的充分大有限次扩域, 其 R 整数环 R' 的剩余类域为 k'. 从 k 到 k' 的纯量扩充给出交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & K_0(k[G]) & \longrightarrow & K_0(k'[G]) & \longrightarrow & P & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow c & & \downarrow c' & & \downarrow \gamma & & \\ O & \longrightarrow & G_0(k[G]) & \longrightarrow & G_0(k'[G]) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & O \end{array}$$

这里 $P = K_0(k'[G])/K_0(k[G])$ 和 $Q = G_0(k'[G])/G_0(k[G])$. 由蛇形引理 (见 §1.8, 习题 5) 得正合列:

$$\begin{aligned} O \longrightarrow \operatorname{Ker}(c) \longrightarrow \operatorname{Ker}(c') \longrightarrow \\ \operatorname{Ker}(\gamma) \longrightarrow \operatorname{Coker}(c) \longrightarrow \operatorname{Coker}(c'). \end{aligned} \tag{2}$$

据 (a) 知: $\operatorname{Coker}(c')$ 被 p^n 零化. 因为 $K_0(k'[G])$ 和 $G_0(k'[G])$ 有相同的 $\mathbb{Z}$ 秩, 所以 c' 是单射, 因此 c 也是单射, 故由 $K_0(k[G])$ 和 $G_0(k[G])$ 有相同 $\mathbb{Z}$ 秩的事实知 $\operatorname{Coker}(c)$ 有限. 但 $K_0(k[G]) \longrightarrow K_0(k'[G])$ 是分裂单射 (见 (9.2.3)). 故群 P 为 $\mathbb{Z}$ 自由, 因而 $\operatorname{Ker}(\gamma)$ 也 $\mathbb{Z}$ 自由. 由于 $\operatorname{Ker}(c') = 0$, 且 $\operatorname{Coker}(c)$ 有限, 由正合列 (2) 推出: $\operatorname{Ker}(\gamma) = 0$. 故 $\operatorname{Coker}(c)$ 可被嵌入 $\operatorname{Coker}(c')$. 因 $\operatorname{Coker}(c')$ 被 p^n 零化, 故 $\operatorname{Coker}(c)$ 也被 p^n 零化. 定理得证. □

(9.4.10) 推论 映射 $c: K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$ 是单射, 它的余核是有限 p 群.

证 由于 $G_0(k[G])$ 是有限生成的加法群, 第二个论断可从定理 (9.4.9) 直接推出. 又由于 $K_0(k[G])$ 和 $G_0(k[G])$ 作为自由 $\mathbb{Z}$ 模具有相同秩 $|\overline{\operatorname{Irr}}_k(G)|$, 第一个论断可从第二个论断推出. □

(9.4.11) 推论 如果二个射影 $k[G]$ 模有相同的合成因子多重集, 则它们同构.

证 这相当于重述了映射 c 的单射性 (见推论 (9.4.10)). □

(9.4.12) 推论 设域 K 对于群 G 充分大. 则 G 的 Cartan 矩阵 $\mathbf{C}$ 对称; $K_0(k[G])$ 上二次型 $\langle x, c(x)\rangle_k$ 正定; 且 $\det(\mathbf{C})$ 是 p 的非负整数幂.

证 $\mathbf{C}$ 的对称性由 (9.3.6) (c) 推出 (也见 (9.2.2)). 由 (9.3.6) (a)—(b) 得:

$$\langle x, c(x)\rangle_k = \langle x, d(e(x))\rangle_k = \langle e(x), e(x)\rangle_K, \qquad \forall\, x \in K_0(k[G]).$$

因为 $G_0(K[G])$ 上双线性型 $\langle -, -\rangle_K$ 正定 (见 (9.2.1) 与 §4.2), 且 e 是单射 (见定理 (9.4.6)), 所以 $K_0(k[G])$ 上二次型 $\langle x, c(x)\rangle_k$ 也正定. 于是 $\mathbf{C}$ 的行列式值大于零. 据推论 (9.4.10) 知: c 的余核是有限 p 群. 这推出 $\det(\mathbf{C})$ 是 p 的非负整数幂. □

(9.4.13) 注意 (a) 以上讨论说明: c 的单射性可从 e 的单射性推出.

(b) 定理 (9.4.9) 等价于以下论断: 存在环同态 $c': G_0(k[G]) \longrightarrow K_0(k[G])$ 使得 $c \cdot c' = p^n \cdot 1_{G_0(k[G])}$ (这也推出 $c' \cdot c = p^n \cdot 1_{K_0(k[G])}$).

(c) 定理 (9.4.9) 里的指数 n 是最好的 (见 §9.5, 习题 1).

习 题

1. 证明: 如果 G 是 4 阶循环群, 则 $d: G_0(\mathbb{Q}[G]) \longrightarrow G_0((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[G])$ 不是满同态.

2. 证明: $c(x \cdot y) = x \cdot c(y)$, $\forall x \in G_0(k[G])$, $y \in K_0(k[G])$.

3. P_S, P_T 分别为 S, $T \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 的射影包. 置 $d_S = \dim_k \mathrm{End}_G(S)$ 与 $d_T = \dim_k \mathrm{End}_G(T)$. 令 $\mathbf{C}_{ST}$ (或 $\mathbf{C}_{TS}$) 为 S (或 T) 作为 P_T (或 P_S) 的合成因子的重数.

(a) 证明: $\mathbf{C}_{ST} d_S = \dim_k \mathrm{Hom}_G(P_S, P_T)$.

(b) 证明: $\mathbf{C}_{ST} d_S = \mathbf{C}_{TS} d_T$.

提示 利用 §9.2, 习题 2 的结论. 注意: 当域 K 充分大时, 有 $d_S = 1$. 这再次证明了此时 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{ST})$ 是对称矩阵的事实.

4. 保持习题 3 的记号. 证明: 如果 S 是射影模, 则 $P_S \cong S$ 和 $\mathbf{C}_{SS} = 1$; 如果 S 不是射影模, 则 $\mathbf{C}_{SS} \geqslant 2$.

提示 利用 §9.2, 习题 3 的结论.

§9.5 同态 e 的像

我们知道: $G_0(k[G])$ 的每个元素 x 可等同于它的 (广义) 特征标 χ_x.

本节研究同态 e 的像, 先要证明: 集合 $e(K_0(k[G]))$ 由 $G_0(K[G])$ 里所有在差集 $G \setminus G_{p'}$ 上取零值的元素组成 (见定理(9.5.1)). 然后研究集合 $e(K_0^+(k[G]))$, 其结果尚不圆满. 在设定条件 (R) 或某种维数条件的前提下能给出较好的刻画 (见命题 (9.5.6) 和命题 (9.5.10)).

(9.5.1) 定理 *映射 $e: K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(K[G])$ 的像等于 $\{x \in G_0(K[G]) \mid \chi_x(g) = 0, \forall g \in G \setminus G_{p'}\}$.*

定理 (9.5.1) 有更精确的形式:

(9.5.2) 定理 *令 K' 为域 K 的有限次扩域. 则 $G_0(K'[G])$ 的元素属于 $K_0(R[G]) \cong K_0(k[G])$ 在映射 e 下的像当且仅当它的特征标在域 K 中取值, 且在 $G \setminus G_{p'}$ 上取零值.*

证 必要时对域作进一步扩充, 我们总可设域 K' 充分大, R' 是 K' 的 R 整数环.

(a) 必要性.

设 E 是射影 $R'[G]$ 模, χ 是 $K'[G]$ 模 $K' \otimes_{R'} E$ 的特征标. 当 E 属于 $K_0(R[G]) \cong K_0(k[G])$ 在映射 e 下的像时, χ 显然在域 K 中取值. 设 $s \in G \setminus G_{p'}$. 我们必须证明: $\chi(s) = 0$. 以由 s 生成的循环子群来替代 G, 可设 G 是循环群, 因而有形状 $S \times P$, 这里 S 是 p' 群, P 是非平凡 p 群. 由 (9.3.11) (c) 知: $E \cong M \otimes R'[P]$, 这里 M 是 R' 自由的 $R'[S]$ 模. $K' \otimes_{R'} E$ 的特征标 χ 等于

$\psi\otimes r_P$, 这里 ψ 是 S 的特征标, r_P 是 P 的正则特征标. 显然, χ 在 $G\setminus S$ 上取零值, 特别, $\chi(s)=0$.

(b) 充分性 (第一部分).

令 $y\in G_0(k'[G])$, 令 χ 为 y 所对应的广义特征标. 设等式 $\chi(s)=0$ 对于每个 $s\in G\setminus G_{p'}$ 都成立. 我们要证明: $y\in K_0(R'[G])$ (这里将 $K_0(R'[G])$ 等同于 $K_0(k'[G])$, 后者等同于 $G_0(k'[G])$ 的子群).

由定理 (9.2.6) 知:

$$1_{K'}=\sum_H \mathrm{Ind}_H^G x_H,$$

这里 $1_{K'}$ 是环 $G_0(K'[G])$ 的恒等元, $x_H\in G_0(K'[H])$, 右边和式里 H 取遍群 G 的所有初等子群. 等号两边同时乘以 y 得:

$$y=\sum_H \mathrm{Ind}_H^G y_H,\quad 这里 y_H=x_H\cdot \mathrm{Res}_H^G(y)\in G_0(K'[H]).$$

y_H 的特征标在 $H\setminus H_{p'}$ 上取零值. 如果已知 $y_H\in K_0(R'[H])$, 则可推出 $y\in K_0(R'[G])$. 所以可将问题归结到 G 是初等群的情形. 由上面的分解式 $G=S\times P$ 得到:

$$G_0(K'[G])=G_0(K'[S])\otimes G_0(K'[P]).$$

因为 χ 在 $G\setminus S$ 上取零值, 所以由 (9.3.11)(b) 知: 可写 $\chi=f\otimes r_P$, 这里 f 是 S 上的类函数, r_P 是 P 的正则特征标. 如果 ρ 是 S 的特征标, 则

$$\langle f\otimes r_P,\rho\otimes 1_P\rangle=\langle f,\rho\rangle\cdot\langle r_P,1_P\rangle=\langle f,\rho\rangle.$$

左边等于 $\langle\chi,\rho\otimes 1_P\rangle$, 是整数. 故 $\langle f,\rho\rangle\in\mathbb{Z}$ 对于 S 的所有特征标 ρ 都成立. 这推出 f 是 S 的广义特征标. 我们能将 y 写成形状:

$$y=y_S\otimes y_P,$$

这里 $y_S\in G_0(K'[S])$, 且 $y_P\in G_0(K'[P])$ 对应于 P 的正则表示. 由命题 (9.3.8) 和 (9.3.10) 知: $y_S\in K_0(R'[S])$ 和 $y_P\in K_0(R'[P])$. 这推出 $y\in K_0(R'[G])$.

(c) 充分性 (第二部分).

保持 (b) 中的记号, 并设 y 的特征标 χ 在域 K 中取值. 我们要证明: $y\in K_0(R[G])$. 由 (b) 知: $y\in K_0(R'[G])$. 令 $r=[K':K]$. 每个 $R'[G]$ 模 M' 通过纯量限制变成 $R[G]$ 模 M. 当 M' 是射影 $R'[G]$ 模时, M 是射影 $R[G]$ 模. 所以 $[M']\mapsto[M]$ 确定了一个环同态:

$$\pi: K_0(R'[G])\longrightarrow K_0(R[G]).$$

令 $z=\pi(y)$. 我们断言: $z=r\cdot y$. 只要在 $G_0(K'[G])$ 中证明该等式就行了. 为此, 只要证明与 z 相关联的特征标 χ_z 等于 $r\cdot\chi$. 但我们有

$$\chi_z=\mathrm{tr}_{K'/K}(\chi).$$

由于 χ 在 K 中取值, 我们得到等式 $\chi_z=r\cdot\chi$ (见引理 (4.5.8)(c)).

现 $y\in K_0(R'[G])$ 和 $r\cdot y\in K_0(R[G])$, 而纯量扩充映射 $K_0(R[G])\longrightarrow K_0(R'[G])$ 是分裂单射 (见 (9.2.3)). 因为 $r\cdot y$ 在 $K_0(R'[G])$ 中被 r 整除, 所以 $r\cdot y$ 在 $K_0(R[G])$ 中也被 r 整除. 这说明 $y\in K_0(R[G])$, 定理得证. □

(9.5.3) 射影 $R[G]$ 模的特征标 我们要刻画群 G 的这样一种 K 表示, 其包含一个 G 稳定 R 格, 后者作为 $R[G]$ 模是射影的. 换句话说, 这相当于刻画 $K_0^+(R[G])$ 在映射 e 下的像. 在这方面我们只有部分结果.

(9.5.4) 引理 *给定 $x\in K_0(R[G])$ 和整数 $n\geqslant 1$. 如果 $nx\in K_0^+(R[G])$, 则 $x\in K_0^+(R[G])$.*

证 设 $r=|\mathrm{Irr}_k(G)|$, 则 $K_0(R[G])$ 可等同于 $\mathbb{Z}^r$, 而 $K_0^+(R[G])$ 可等同于 $\mathbb{N}^r$. 显然, 由条件 $(na_1,\dots,na_r)\in\mathbb{N}^r$ 与 $(a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{Z}^r$ 可推出 $a_i\in\mathbb{N}$, $\forall\, 1\leqslant i\leqslant r$. □

(9.5.5) 命题 *令 K' 为域 K 的有限次扩域, R' 为 K' 的 R 整数环. 设 $x\in G_0(K'[G])$ 满足:*

(a) x 的 (广义) 特征标 χ_x 满足: $K=K(\chi_x)$ (见引理 (4.5.3) 前).

(b) 存在整数 $n\geqslant 1$ 和射影 $R'[G]$ 模 E' 使得等式 $nx=[E']$ 成立.

则存在唯一的 (在同构的意义下) 射影 $R[G]$ 模 Y 使得 $x=[Y]$.

证 令 $N=[K':K]=[R':R]$. 令 E' 为射影 $R'[G]$ 模, 其在 $G_0(K'[G])$ 里的像为 nx, 令 E 为由 E' 通过纯量限制而得到的射影 $R[G]$ 模. 则 $K\otimes_R E$ 的特征标等于 $nN\chi_x$ (见引理 (4.5.8)). 于是, 在 $G_0(K'[G])$ 里有

$$e([E])=nN\cdot x$$

由定理 (9.5.1) 知: $e([E])$ 的特征标在 $G\setminus G_{p'}$ 上取零值; 于是 χ_x 在 $G\setminus G_{p'}$ 上也取零值. 由定理 (9.5.2) 知: 存在某 $y\in K_0(R[G])$ 满足 $x=e(y)$. 由于 e 是单射 (见定理 (9.4.6)), 这推出 $[E]=nN\cdot y$, 而由引理 (9.5.4) 知: $y\in K_0^+(R[G])$. 因此存在射影 $R[G]$ 模 Y 使得等式 $[K\otimes_R Y]=x$ 在 $G_0(K[G])$ 中成立. Y 的唯一性可由推论 (9.4.11) 与定理 (9.4.6) 得到. □

人们可能要问: 等式 $e(K_0^+(R[G])=e(K_0(R[G]))\bigcap G_0^+(K[G])$ 是否总成立? 回答一般是否定的 (见习题 3 和 §10.3, 习题 7). 但是, 我们有以下判别准则:

(9.5.6) 命题 假设关于群 G 的以下条件满足:

(R) 存在域 K 的有限次扩域 K', 其 R 整数环 R' 的剩余类域为 k', 且满足 $d(G_0^+(K'[G])) = G_0^+(k'[G])$. 则有等式

$$e(K_0^+(R[G])) = e(K_0(R[G]))\bigcap G_0^+(K[G]).$$

(9.5.7) 注意 据推论 (9.1.17) (c), 我们可把 $K_0(R[G])$ (或 $K_0^+(R[G])$) 与 $K_0(k[G])$ (或 $K_0^+(k[G])$) 等同起来.

证 包含关系 "$\subseteq$" 显然. 下面要证明反包含关系 "$\supseteq$". 根据命题 (9.5.5), 我们只须考虑域 K 充分大的情形. 此时, 条件 (R) 意味着映射 d 将 $G_0^+(K[G])$ 映到 $G_0^+(k[G])$ 上. 现令

$$x \in e(K_0(R[G]))\bigcap G_0^+(K[G]).$$

由于 $x \in e(K_0(R[G]))$, 我们能将元素 x 写为

$$x = \sum_{E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} n_E \cdot e([\tilde{P}_E]),$$

这里 $\tilde{P}_E$ 是射影 $R[G]$ 模, 其经模 $\mathfrak{m}$ 约化后变成 E 的射影包 P_E (见推论 (9.1.17) (c)). 我们必须证明: 整数 n_E 非负. 据条件 (R), 对于每个 $E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$, 存在 $z_E \in G_0^+(K[G])$ 使得 $d(z_E) = [E]$. 因为 $x \in G_0^+(K[G])$, 所以 $\langle x, z_E\rangle_K \geqslant 0$. 另一方面, 由映射 d 和 e 互为伴随的事实可推出等式 $\langle x, z_E\rangle_K = n_E$. 因此 $n_E \geqslant 0$. 命题得证. □

由命题 (9.5.6) 和定理 (9.5.1) 可知:

(9.5.8) 推论 假设群 G 满足命题 (9.5.6) 中的条件 (R). 设 E 是 $K[G]$ 模. 则存在射影 $R[G]$ 模 M 使得 $E = K \otimes_R M$ 当且仅当 E 的特征标在 $G \setminus G_{p'}$ 上取零值.

(9.5.9) 注意 条件 (R) 等价于下述条件:

(R$'$) 如果域 K 充分大, 则每个单 $k[G]$ 模是某 $K[G]$ 模 (必须是单模) 的模 $\mathfrak{m}$ 约化 (换句话说, 群 G 的每个不可约 k 表示可提升到域 K 上去).

回忆 (1.1.5) 中关于 p 可解群的定义. Fong-Swan 的一个定理断言: 任何 p 可解群 G 满足上面的条件 (R) 和 (R$'$).

在本节的最后部分, 我们要考虑关于射影 R[G] 模的一种特殊情形. 设域 K 充分大.

(9.5.10) 命题 设 E 是单 $K[G]$ 模, P 是 E 的 G 稳定 R 格. 设 $\dim_K E$ 可被 $|G|_p$ 整除. 则

(a) P 是射影 $R[G]$ 模.

(b) 典范映射 $R[G] \longrightarrow \mathrm{End}_R(P)$ 是满射, 其核是 $R[G]$ 的直和项 (作为双边理想).

(c) P 的模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{P} = P/\mathfrak{m}P$ 是射影单 $k[G]$ 模.

由命题 (9.5.10) (a) 和定理 (9.5.2) 推出:

(9.5.11) 推论 满足命题 (9.5.10) 假设条件的单 $K[G]$ 模 E 的特征标 χ_E 在 $G \setminus G_{p'}$ 上取零值.

命题 (9.5.10) 的证明 设 $m = \dim_K E$. 由 $p^n \mid m$ 知: $m/|G| \in R$. 令 s_P 为 P 的由 $s \in G$ 的作用所引起的 R 模自同构. 如果 $\phi \in \mathrm{End}_R(P)$, 则 $s_P^{-1}\phi$ 的迹 $\mathrm{tr.}(s_P^{-1}\phi)$ 属于 R, 所以可定义元素

$$u_\phi = \frac{m}{|G|}\sum_{s\in G}\mathrm{tr.}(s_P^{-1}\phi)s \in R[G].$$

由定理 (4.5.14) 知: u_ϕ 在 $\mathrm{End}_K(E)$ 里有像 $1 \otimes \phi$, 而对于每个不同构于 E 的 $K[G]$ 模 E', u_ϕ 在 $\mathrm{End}_K(E')$ 里的像为零. 这证明了 (b). 易见 P 是射影 $\mathrm{End}_R(P)$ 模. 令 A 为 $\mathrm{End}_R(P)$ 的由 $\{s_P \mid s \in G\}$ 生成的 R 子代数. 则 P 是射影 A 模, 因而也是射影 $R[G]$ 模, 这证明了 (a). 同理可证 (c). □

习 题

1. 设 H 是 G 的 Sylow p 子群, $|H| = p^n$. 证明:

(a) 如果 E 是射影 $k[G]$ 模, 则 E 是自由 $k[H]$ 模 (见 (9.3.10)), 因此 $p^n \mid \dim_k E$.

(b) 映射 $[E] \mapsto \overline{\dim_k E}$ 确定群的满同态: $\mathrm{Coker}(c) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. 特别, $p^{n-1} \in G_0(k[G])$ 不属于 Cartan 同态 c 的像 $\mathrm{Im}(c)$.

2. 沿用命题 (9.5.5) 的记号 R'. 证明: $K_0^+(R[G]) = K_0^+(R'[G]) \bigcap K_0(R[G]) = K_0^+(R'[G]) \bigcap G_0(K[G])$.

3. 证明: 对于充分大的域 K, 命题 (9.5.6) 里的条件 (R) 等价于条件:

$$e(K_0^+(R[G])) = e(K_0(R[G])) \bigcap G_0^+(K[G]).$$

提示 观察元素 $x \in K_0(k[G])$ 属于 $K_0^+(k[G])$ 当且仅当 $\langle x, y\rangle_k \geqslant 0, \forall y \in G_0^+(k[G])$.

4. 令 G 为交代群 A_4. 证明: 当 $p = 2$ 时, 群 G 没有如命题 (9.5.10) 所描述的那种射影单 $k[G]$ 模, 但当 $p = 3$ 时群 G 有那种射影单 $k[G]$ 模. 对于 S_4 考虑同样的问题.

5. 令 $S \in \overline{\mathrm{Irr}_k}(G)$. 证明下列条件等价:

(a) S 是射影 $k[G]$ 模.

(b) S 同构于满足命题 (9.5.10) 条件的 $R[G]$ 模 P 的模 $\mathfrak{m}$ 约化.

(c) 群 G 的 Cartan 矩阵的对角系数 C_{SS} 等于 1.

提示 关于 (a) 和 (c) 的等价性, 参见 §9.4 的习题 4.

第十章 Brauer 特征标、块及其亏群

本章要介绍 Brauer 研究有限群模表示理论的基本工具: Brauer 特征标. 设 (K,R,k) 是 p 模系统, 其中 $\mathrm{char}.K=0$ 和 $\mathrm{char}.k=p$. 设 G 是有限群. 命题 (9.1.6) 告诉我们: 集合 $\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 在 $G_0(k[G])$ 里线性无关. 但是有例子表明: 存在两个具有相同特征标的 $k[G]$ 模 E、E', 它们作为 $k[G]$ 模不同构, 甚至连合成因子的多重集都不相同. $E=k^p$ 和 $E'=k^{2p}$ 就是其中一例 (它们的特征标都等于零). 尽管如此, 特征标理论仍能被用来研究 $k[G]$ 模. 对于每个 $k[G]$模 E, Brauer 引进一个 K 值类函数 ϕ_E (即 **Brauer 特征标**), 它定义在 G 的 p' 元素集合 $G_{p'}$ 上 (或只在 $G_{p'}$ 上取非零值). 这个类函数将保留我们所要的关于 $k[G]$ 模 E 的绝大多数信息, 并建立了群 G 在特征零域上表示与特征 $p>0$ 域上表示之间的联系.

§10.1 Brauer 特征标

(10.1.1) 表示的 Brauer 特征标

令 m' 为 $G_{p'}$ 里元素阶数的最小公倍数.

在本章, 我们总假设 **域 K 包含 m' 次单位根组成的乘法群** $\mu_K(G)$ (这推出域 k 关于群 G 充分大).

因为 R 在 K 中整闭 (即 K 中的 R 整数都属于 R), 所以 $\mu_K(G)\subseteq R$. 由于 m' 与 p 互素, 模 $\mathfrak{m}$ 约化给出从群 $\mu_K(G)$ 到剩余类域 k 里 m' 次单位根群 $\mu_k(G)$ 上的同构映射 $a\mapsto\overline{a}$. 对于 $\lambda\in\mu_k(G)$, 记 $\tilde{\lambda}$ 为 $\mu_K(G)$ 中满足条件 $\overline{\tilde{\lambda}}=\lambda$ 的元素.

设 (ρ, E) 是 G 的以 ψ 为特征标的 k 表示. 定义函数 $\phi_E : G_{p'} \longrightarrow R$ 如下. 对于 $x \in G_{p'}$, 令 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mu_k(G)$ 为 $\rho(x)$ 的所有特征值 (计重数, 故 $n = \deg \rho$ 和 $\sum \epsilon_i = \psi(x)$). 记 $\phi_E(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\epsilon}_i$. 称 ϕ_E 为 G 的 **k 表示** E (或 ρ) 的 **Brauer 特征标** (Brauer 称之为 G 的**模特征标**).

(10.1.2) Brauer 特征标的基本性质

(a) $\phi_E(1) = n = \dim_k E$.

(b) ϕ_E 是 $G_{p'}$ 上类函数: $\phi_E(tst^{-1}) = \phi_E(s)$, $\forall s \in G_{p'}$, $t \in G$.

(c) 如果 $O \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow O$ 是 $k[G]$ 模正合列, 则 $\phi_E = \phi_{E'} + \phi_{E''}$.

(d) $\phi_{E_1 \otimes E_2} = \phi_{E_1} \cdot \phi_{E_2}$.

以上 4 个性质可直接从函数 ϕ_E 的定义推出, 故证明从略.

(e) 如果 $g \in G$ 有 p' 部分 $g_{p'} \in G_{p'}$, 则 $\psi(g)$ 等于 $\phi_E(g_{p'})$ 的模 $\mathfrak{m}$ 约化, 即 $\psi(g) = \overline{\phi_E(g_{p'})}$.

证 $\rho(g^{-1}g_{p'}) = \rho(g_p)$ 的特征值都是 p 幂次单位根, 由于 char.$k = p > 0$, 这些特征值都等于 1. 于是 $\rho(g)$ 和 $\rho(g_{p'})$ 有相同的特征值多重集. 这推出等式 $\psi(g) = \psi(g_{p'}) = \overline{\phi_E(g_{p'})}$. □

(f) 设 M 是以 χ 为特征标的 $K[G]$ 模. 令 E_1 为 M 的 G 稳定 R 格, 令 $E = E_1/\mathfrak{m}E_1$ 为 E_1 的模 $\mathfrak{m}$ 约化. 则 ϕ_E 是 χ 在 $G_{p'}$ 上的限制.

证 只要观察 G 是循环 p' 群 $\langle g \rangle$ 的情形. 定理 (9.3.3) 告诉我们: ϕ_E 不依赖于稳定格 E_1 的选取. 所以可归结为 E_1 作为 $R[G]$模由 g 的特征向量所生成的情形, 此时结论显然. □

(g) 设 M 是射影 $k[G]$ 模. 设 $\tilde{M}$ 是射影 $R[G]$ 模, 其模 $\mathfrak{m}$ 约化等于 M. 以 Φ_M 记 $\tilde{M}$ 的特征标 (即 $K[G]$ 模 $K \otimes_R \tilde{M}$ 的特征标). 对于任意 $k[G]$ 模 E, $k[G]$ 模 $E \otimes_k M$ 是射影的 (见 §1.9, 习题 6), 故可记 $\Phi_{E \otimes_k M}$. 我们有

$$\Phi_{E \otimes_k M}(s) = \begin{cases} \phi_E(s)\Phi_M(s), & \text{如果} s \in G_{p'}, \\ 0, & \text{如果} s \in G \setminus G_{p'}. \end{cases} \tag{1}$$

证 把 ϕ_E 零拓展为 G 上的类函数, 即规定 ϕ_E 在集合 $G \setminus G_{p'}$ 上取零值, 则等式 (1) 可更简洁地写成

$$\Phi_{E \otimes_k M} = \phi_E \cdot \Phi_M. \tag{2}$$

由定理 (9.5.1) 知: $\Phi_{E \otimes_k M}(s) = 0$, $\forall s \in G \setminus G_{p'}$. 由 (f) 知: $\Phi_{E \otimes_k M}$ 和 Φ_M 在 $G_{p'}$ 上的限制分别等于 $E \otimes_k M$ 和 M 的 Brauer 特征标. 故等式 (2) 可由 (d) 推出. □

(h) 在与 (g) 相同的假设条件下, 有

$$\langle M, E\rangle_k = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G_{p'}} \Phi_M(s^{-1})\phi_E(s) = (\phi_E, \Phi_M)_K.$$

证 由定义知: $\langle M, E\rangle_k$ 等于 $H = \mathrm{Hom}_k(M, E)$ 里由 G 固定元组成的子空间 H^G 的维数 (见 (2.5.2)), 而 $(\phi_E, \Phi_M)_K := \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\Phi_M(s^{-1})\phi_E(s)$.

由命题 (2.5.1)(k) 知: $H \cong E\otimes_k M^*$ 是射影 $k[G]$ 模. 设 $\tilde{H}$ 是 H 所对应的射影 $R[G]$ 模 (见推论 (9.1.17) (c)). 易见: $\dim_k H^G = \dim_K K\otimes_R \tilde{H}^G$. 如果 Φ_H 是 $K\otimes_R \tilde{H}$ 的特征标, 则

$$\langle M, E\rangle_k = (\Phi_H, 1_G)_K = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\Phi_H(s).$$

据 (g) 和 (4.1.1) 的性质 7 知: 当 $s\in G_{p'}$ 时, 有 $\Phi_H(s) = \phi_E(s)\Phi_{M^*}(s) = \phi_E(s)\Phi_M(s^{-1})$; 当 $s\in G\setminus G_{p'}$ 时, 有 $\Phi_H(s) = 0$. 这推出所要的结论. □

下面考虑 E 是单位表示的特殊情形:

(i) 射影 $k[G]$ 模 M 中由 G 固定元组成的子空间 M^G 有维数

$$(\Phi_M, 1_G)_K = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G_{p'}}\Phi_M(s).$$

(j) 设 ϕ 是 G 的 Brauer 特征标, 定义 $\phi^* : G_{p'} \longrightarrow R$ 使得对于 $x\in G_{p'}$, $\phi^*(x) = \phi(x^{-1})$. 则 ϕ^* 也是 G 的 Brauer 特征标.

证 令 ρ 为 G 的提供 Brauer 特征标 ϕ 的 k 表示. 令 ρ^* 为 ρ 的反轭表示 (见 (2.2.2)), 它也是 G 的 k 表示. 如果 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是 $\rho(g)$ 的特征值, 则 $\epsilon_1^{-1},\ldots,\epsilon_n^{-1}$ 是 $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ 的特征值, 因而也是 $\rho^*(g)$ 的特征值. 这推出所要的结论. □

(10.1.3) 注意 (a) (10.1.2) (c) 允许我们对于 $G_0(k[G])$ 的任意元素 x 定义其 Brauer 特征标 ϕ_x. 据 (10.1.2) (f), 如果 $y\in G_0(K[G])$ 与 $x = d(y)$, 则 ϕ_x 恰为对应于 y 的广义特征标 χ_y 在 $G_{p'}$ 上的限制. 据 (10.1.2)(e), 集合 $G_{p'}$ 上的 Brauer 特征标 ϕ 方面的信息可完全恢复相关的 k 特征标 ψ. Brauer 特征标的重要性在于其建立了群 G 在特征零域上表示与特征 $p>0$ 域上表示之间的联系.

(b) 可类似地定义域 k (为方便起见, 可设 k 是代数闭域) 上任意线性代数群 G (见 Humphreys 的相关著作) 的 Brauer 特征标. 集合 $G_{p'}$ 在该情形下定义为 G 的所有半单元组成的集合. 如果 E 是 G 的 (线性) 表示, $s\in G_{p'}$, 则定义 $\phi_E(s)$ 为 s 所对应的 E 上自同构 s_E 的特征值在域 K 的对应元之和 (见 (10.1.1), 注意: 域 k 的单位根群 μ_k 与域 K 的阶数与 p 互素的单位根组成的

群 $\mu_K \subseteq R$ 之间存在典范同构, 而 s_E 的特征值都是域 k 的单位根). 于是, G 的 Brauer 特征标 ϕ_E 被定义为 $G_{p'}$ 上的 R 值类函数.

(10.1.4) 称 ϕ_E ($E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$) 为群 G 的**不可约 Brauer 特征标**, 记 $\mathrm{IBr}(G) = \{\phi_E \mid E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)\}$. 由 Brauer 特征标的定义和 (10.1.2) (e)—(f) 易见: 群 G 的任何 Brauer 特征标 (进而, G 的任何 K 特征标 χ 在 $G_{p'}$ 上的限制) 可写成 $\mathrm{IBr}(G)$ 中元素的 $\mathbb{Z}$ 线性组合.

(10.1.5) 定理 (Brauer) *集合 $\mathrm{IBr}(G)$ 形成 $G_{p'}$ 上 K值类函数空间的一组基.*

证 (a) 先要证明: 集合 $\mathrm{IBr}(G)$ 为 K 线性无关. 设有关系式 $\sum_E a_E\phi_E = 0$, 其中 $a_E \in K$ 不全为零. 以 K 中一个适当的元素同时乘以所有的 a_E 后, 我们可设所有的 a_E 都属于 R, 且其中至少有一个 a_E 不属于 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$. 经模 $\mathfrak{m}$ 约化得:

$$\sum_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} \overline{a_E}\,\overline{\phi_E(s)} = 0, \qquad \forall\, s \in G_{p'},$$

其中上划线表示模 $\mathfrak{m}$ 约化, 至少有一个 $\overline{a_E}$ 非零. 由 (10.1.2) (e) 得:

$$\sum_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} \overline{a_E}\chi_E(t) = 0, \qquad \forall\, t \in G, \tag{3}$$

这里 χ_E 是由 E 所提供的 $k[G]$ 特征标. (3) 式对于所有 $t \in k[G]$ 也成立. 因为 k 充分大 (见 (10.1.1) 对本章的假设), 所以 (3) 式的和式里出现的 $k[G]$ 模 E 都绝对单. 由稠密性定理 (1.7.1) 知: k 代数同态 $k[G] \longrightarrow \bigoplus_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)}\mathrm{End}_k(E)$ 是满射. 现设 $E_0 \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 满足条件 $\overline{a_{E_0}} \neq 0$, 设 $u \in \mathrm{End}_k(E_0)$ 满足 $\mathrm{tr}.(u) \neq 0$, 设 $t_0 \in k[G]$ 在 $\mathrm{End}_k(E_0)$ 里的像为 u, 而在 $\mathrm{End}_k(E')$ ($E' \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G) \setminus \{E_0\}$) 里的像都为 0. 则由 (3) 式 (到 $k[G]$ 的扩充) 推出 $\overline{a_{E_0}} \cdot \chi_{E_0}(t_0) = 0$, 与条件 $\overline{a_{E_0}} \neq 0 \neq \chi_{E_0}(t_0)$ 矛盾.

(b) 必须证明: $\{\phi_E \mid E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)\}$ 生成了由 $G_{p'}$ 上 K 值类函数组成的 K 向量空间. 令 f 为 $G_{p'}$ 上 K 值类函数. 将 f 扩充为 G 上某个 K值类函数 f'. 写 $f' = \sum \lambda_i\chi_i$, 其中 $\lambda_i \in K$, $\chi_i \in \mathrm{Irr}_K(G)$. 因此 $f = \sum \lambda_i\tilde{\chi_i}$, 这里 $\tilde{\chi_i}$ 是 χ_i 在 $G_{p'}$ 上的限制. 由于每个 $\tilde{\chi_i}$ 是 $\mathrm{IBr}(G)$ 中元素的线性组合 (见 (10.1.4)), 我们得到所要的结论. □

设 $\mathrm{cf}_K(G_{p'})$ 是由 $G_{p'}$ 上所有 K 值类函数组成的空间 (注意 $G_{p'}$ 是 G 的 p' 共轭类的并). 则 $\mathrm{cf}_K(G_{p'})$ 有自然的 K 代数结构. 定理 (10.1.5) 有等价叙述:

(10.1.5)′ 定理 *从 $G_0(k[G])$ 到 $\mathrm{cf}_K(G_{p'})$ 的映射 $x \mapsto \phi_x$ 可扩充为从 $K \otimes_{\mathbb{Z}} G_0(k[G])$ 到 $\mathrm{cf}_K(G_{p'})$ 的 K代数同构.*

从这些定理可导出:

(10.1.6) 推论 群 G 的 p' 共轭类的个数等于 $|\mathrm{IBr}(G)|$. 这也等于 G 的互异不可约 k 表示的个数.

证 第一个论断由定理 (10.1.5) 导出. 由 (10.1.2) (e) 知: 互异的不可约 k 表示提供不同的 Brauer 特征标. 这推出第二个论断. □

(10.1.7) 注意 (a) 令 M 和 M' 为两个具有相同 Brauer 特征标的 $k[G]$ 模. 则等式 $[M]=[M']$ 在 $G_0(k[G])$ 中成立; 如果 M 和 M' 都是半单 $k[G]$ 模, 则 $M \cong M'$.

(b) 对于 $x \in G_0(K[G])$, 令 χ_x 为 x 所对应的广义特征标. 对于环同态 $d: G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$, 有 $\operatorname{Ker} d = \{x \in G_0(K[G]) \mid \chi_x(s)=0, \quad \forall\, s \in G_{p'}\}$. 由于 d 是满射 (见定理 (9.4.1)), 通过 (a) 可给出 $G_0(k[G])$ 作为 $G_0(K[G])$ 的商环的明显刻画.

(10.1.8) 对定理 (9.4.9) 的重述 我们已经看到: $x \mapsto \phi_x$ 定义了从 $K \otimes_{\mathbf{Z}} G_0(k[G])$ 到 $\mathrm{cf}_K(G_{p'})$ 上的 K 代数同构 (故可将两者等同起来). 另一方面, 设 $\mathrm{cf}_K(G; G_{p'})$ 是 G 上的在 $G_{p'}$ 外都取零值的 K 值类函数组成的空间. 则 K 代数同态 $1_K \otimes e: K \otimes_{\mathbf{Z}} K_0(k[G]) \longrightarrow K \otimes_{\mathbf{Z}} G_0(K[G])$ 将 $K \otimes_{\mathbf{Z}} K_0(k[G])$ 同构地映到 $\mathrm{cf}_K(G; G_{p'})$ 上 (这可通过比较两个 K 空间的维数得到, 于是, 可将 $K \otimes_{\mathbf{Z}} K_0(k[G])$ 与 $\mathrm{cf}_K(G; G_{p'})$ 等同起来). 以 K 作张量积, cde 三角形变成:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{cf}_K(G; G_{p'}) & \xrightarrow{1_K \otimes c} & \mathrm{cf}_K(G_{p'}) \\
{\scriptstyle 1_K \otimes e} \searrow & & \nearrow {\scriptstyle 1_K \otimes d} \\
& \mathrm{cf}_K(G) &
\end{array}
$$

图 2

映射 $1_K \otimes c$, $1_K \otimes d$, $1_K \otimes e$ 有明显的定义: 限制, 限制, 被包含. 由推论 (9.4.10) 知 $1_K \otimes c$ 是同构映射. 对于 $M \in \overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 和 $E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$, 以 χ_M 记 M 的特征标, 以 ϕ_E 记 E 的 Brauer 特征标, 和以 Φ_E 记 Φ_{P_E} (见 (10.1.2)(g)). 则矩阵 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{E'E})$ 和 $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{EM})$ 的系数出现在如下等式里:

$$
\begin{aligned}
\chi_M &= \sum_{E \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} \mathbf{D}_{EM} \phi_E, && G_{p'} \text{ 上函数}, \\
\Phi_E &= \sum_{M \in \overline{\mathrm{Irr}}_K(G)} \mathbf{D}_{EM} \chi_M, && G \text{ 上函数}, \\
\Phi_E &= \sum_{E' \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)} \mathbf{C}_{E'E} \phi_{E'}, && G_{p'} \text{ 上函数}.
\end{aligned}
$$

我们有正交关系:

$$(\Phi_E, \phi_{E'}) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G_{p'}} \Phi_E(s^{-1})\phi_{E'}(s) = \delta_{EE'}, \quad \forall\, E, E' \in \overline{\operatorname{Irr}}_k(G).$$

(10.1.9) 定义 *以* Bch(G) *记由* G *的所有* Brauer *特征标生成的加法群. 对于* $\phi \in \mathrm{ch}_K(G)\bigcup \mathrm{Bch}(G)$, *定义* G *上函数* $\widetilde{\phi}$ *如下:*

$$\widetilde{\phi}(s) = \begin{cases} |G|_p\phi(s), & \text{如果 } s \in G_{p'}, \\ 0, & \text{如果 } s \in G\setminus G_{p'}. \end{cases}$$

定理 (9.4.9) 可改述如下:

(9.4.9)′ 定理 *如果* $\phi \in \mathrm{Bch}(G)$, *则* $\widetilde{\phi} \in \mathrm{ch}_K(G)$.

(10.1.10) 对于 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, 令 $\hat{\chi}$ 为 χ 在 $G_{p'}$ 上的限制. 写

$$\hat{\chi} = \sum_{\phi\in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi. \tag{4}$$

称 $d_{\chi\phi} \in \mathbb{N}$ 为 **G 关于素数 p 的分解数**. 称 $\mathbf{D}_0 = (d_{\chi\phi})_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G),\phi\in\mathrm{IBr}(G)}$ 为 **G 关于素数 p 的分解矩阵**. 该矩阵在允许相差关于行, 列的置换的情形下被群 G 和素数 p 唯一确定.

(10.1.11) 定理 *分解矩阵* $\mathbf{D}_0 = (d_{\chi\phi})$ *的列向量线性无关.*

证 记 $V := \mathrm{cf}_K(G_{p'})$. 设 $W \subseteq V$ 是由 IBr(G) 张成的 K 子空间. 定义域 K 上的列向量空间 $U = \langle (d_{\chi\phi})_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} \mid \phi \in \mathrm{IBr}(G)\rangle$. 则

$$\dim_K U \leqslant |\mathrm{IBr}(G)| = \dim_K W \leqslant \dim_K V.$$

这里的等号由定理 (10.1.5) 推出. 现只要证明关系 $\dim_K V \leqslant \dim_K U$. 为此, 只要找到从 V 的对偶空间 V^* 到 U 的单射. 对于 $\alpha \in V^*$, 定义列向量 $\tau(\alpha) = (\alpha(\hat{\chi}))_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)}$. 因为 $\alpha(\hat{\chi}) = \alpha(\sum_{\phi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi) = \sum_{\phi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\alpha(\phi)$, 所以 $\tau(\alpha) = \sum_{\phi\in\mathrm{IBr}(G)} \alpha(\phi)(d_{\chi\phi})_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} \in U$. 于是, $\alpha \mapsto \tau(\alpha)$ 确定从 V^* 到 U 内的 K 线性映射. 如果 $\tau(\alpha) = 0$, 即 $\alpha(\hat{\chi}) = 0$, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, 则我们断言: $\alpha = 0$. 这因为: 任取 $f \in V$. 将 f 扩充为 G 的类函数 f_1. 因为 $\mathrm{Irr}_K(G)$ 是 G 上 K 值类函数空间的一组基 (见定理 (3.1.8), 命题 (4.5.1) 和推论 (4.5.12)), 所以可写 $f_1 = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} a_\chi\chi$. 于是, $f = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} a_\chi\hat{\chi}$ 和 $\alpha(f) = 0$. 断言得证. 因此 τ 是单射, 这推出定理的结论. □

(10.1.12) 推论 *对于* $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$, *必存在满足条件* $d_{\chi\phi} \neq 0$ *的* $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$.

证 这因为由定理 (10.1.11) 知矩阵 $(d_{\chi\phi})$ 没有零列. □

对于每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, 有 $0 \neq \chi(1_G) = \hat{\chi}(1_G) = \sum d_{\chi\phi}\phi(1_G)$. 因此存在 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ 使得 $d_{\chi\phi} \neq 0$. 所以矩阵 $(d_{\chi\phi})$ 也没有零行.

(10.1.13) 定理 设 $p \nmid |G|$. 则 $\mathrm{IBr}(G) = \mathrm{Irr}_K(G)$.

证 由假设 $p \nmid |G|$ 和定理 (3.1.1) 知: 群代数 $k[G]$ 完全可约. 故 $|G| = \dim_k k[G] = \sum_{\rho_i \in \mathrm{Irr}_k(G)} (\deg \rho_i)^2$. 如果 $\rho_i \in \mathrm{Irr}_k(G)$ 提供 $\phi_i \in \mathrm{IBr}(G)$, 则 $\deg \rho_i = \phi_i(1_G)$. 于是,

$$\begin{aligned}\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(1_G)^2 = |G| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} \chi(1_G)^2 &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} \left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\phi}\phi(1_G) \right)^2 \\ &= \sum_{\phi, \mu \in \mathrm{IBr}(G)} \phi(1_G)\mu(1_G) \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} d_{\chi\phi} d_{\chi\mu}. \end{aligned} \tag{5}$$

根据推论 (10.1.12) 和事实 $d_{\chi\phi} \in \mathbb{N}$ ($\forall \chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$) 知:

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} d_{\chi\phi} d_{\chi\mu} \geqslant \begin{cases} 0, & \text{如果 } \phi \neq \mu, \\ 1, & \text{如果 } \phi = \mu. \end{cases} \tag{6}$$

由 (5) 式知: (6) 式中的所有不等号全为等号. 现有 $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} (d_{\chi\phi})^2 = 1$. 对于每个 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$, 存在唯一的 χ 使得 $d_{\chi\phi} \neq 0$, 此时有 $d_{\chi\phi} = 1$. 进而, 由 (5) 式可见: 对于每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, 存在唯一的 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ 满足 $d_{\chi\phi} \neq 0$. 因此由 (4) 式得: $\chi = \hat{\chi} = \phi$. □

函数 $f : G_{p'} \longrightarrow R$ 是 Brauer 特征标的必要条件是: 对于 G 的任何 p' 子群 H, 限制函数 f_H 是 H 的 Brauer 特征标, 因此也是 H 的通常特征标. 容易看出: 每个 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ 是 $\{\hat{\chi} \mid \chi \in \mathrm{Irr}_K(G)\}$ 中元素的 K 线性组合. 下面要证明比这更强的结论.

(10.1.14) 定理 每个 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ 都是 $\{\hat{\chi} \mid \chi \in \mathrm{Irr}_K(G)\}$ 的 $\mathbb{Z}$线性组合.

证 将 ϕ 扩充为 G 的类函数 f 使得 $f(g) = \phi(g_{p'})$, $\forall g \in G$. 只要证明: f 是 G 的广义特征标. 由定理 (7.2.8) 知: 只要对 G 是初等子群的情形证明本结论即可. 现设 $G = P \times Q$, 这里 P 是 p 群, Q 是 p' 群. 如果 $g \in G$, 写 $g = xy$, 其中 $x \in P$ 和 $y \in Q$ 分别为 g 的 p 部分和 p' 部分 (见 §1.1). 则 $f(g) = \phi(y)$. 因此 $f = 1_P \times \phi_Q$, 这里 1_P 是 P 的单位特征标, ϕ_Q 是 ϕ 在 Q 上的限制. 据定理 (10.1.13) 知: ϕ_Q 是 Q 的广义特征标. 于是, f 是 G 的广义特征标. □

(10.1.15) 同态 d 的截面 由定理 (9.4.1) 知: 环同态 $d : G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$ 是满射. 我们要构造环同态 d 的一个截面, 即满足关系式 $d \cdot \sigma = 1$ 的环同态

$$\sigma : G_0(k[G]) \longrightarrow G_0(K[G]).$$

设 f 是 $G_{p'}$ 上类函数. 定义 G 上类函数 f' 如下: 对于 $g \in G$,

$$f'(g) = f(g_{p'}).$$

(10.1.16) 定理　(a) 如果 $f \in \mathrm{Bch}(G)$, 则 $f' \in \mathrm{ch}_K(G)$.

(b) 映射 $f \mapsto f'$ 定义了从 $G_0(k[G])$ 到 $G_0(K[G])$ 内的环同态, 它是环同态 d 的截面.

证　由 (10.1.4) 知: f 是 $\mathrm{IBr}(G)$ 中元素的 $\mathbb{Z}$ 线性组合. 故 (a) 可从定理 (10.1.14) 的证明中得到. 观察 f' 到 $G_{p'}$ 的限制等于 f, 故结论 (b) 由 (a) 推出. □

下面列举一些群的 Brauer 特征标.

(10.1.17) 对称群 S_4　回忆对称群 S_4 的特征标表 (见 (4.2.6)):

	1_G	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

要确定群 $G = S_4$ 在 $\mathrm{char}.k = p > 0$ 且 $p \mid |G|$ 时的不可约 Brauer 特征标. 此时有 $p = 2$ 或 $p = 3$.

(a) $\mathrm{char}.k = 2$ 的情形. 存在 2 个 $2'$ 类: 分别是 1_G 和 (123) 所在的共轭类. 由推论 (10.1.6) 知: 有 2 个不可约 k 表示. 仅有的 1 次 k 表示是单位表示, 其 Brauer 特征标等于 $\phi_1 = 1$. 另一方面, 次数为 2 的不可约 K 表示经模 2 约化后变为 ρ_2, 其 Brauer 特征标 ϕ_2 在元素 (123) 上取值 -1. 于是, ρ_2 不是 2 个次数为 1 的 k 表示的扩张 (否则就有 $\phi_2 = 2\phi_1 = 2$), 故不可约. 因此群 S_4 恰有 2 个不可约 Brauer 特征标: ϕ_1 和 ϕ_2.

	1_G	(123)
ϕ_1	1	1
ϕ_2	2	-1

分解矩阵 $\mathbf{D}$ 可通过将特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_5$ 在 $G_{p'}$ 上的限制表成函数 ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合而得到. 作为 $G_{p'}$ 上函数有以下等式:

$$\chi_1 = \chi_2 = \phi_1, \qquad \chi_3 = \phi_2, \qquad \chi_4 = \chi_5 = \phi_1 + \phi_2.$$

因此得到:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

对应于 ϕ_1 和 ϕ_2 的不可分解射影模的特征标 Φ_1 和 Φ_2 可由矩阵 $\mathbf{D}$ 的转置得到:

$$\Phi_1=\chi_1+\chi_2+\chi_4+\chi_5,$$

$$\Phi_2=\chi_3+\chi_4+\chi_5.$$

对应的表示有次数 8. Cartan 矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{D}\cdot{}^t\mathbf{D}=\begin{pmatrix}4&2\\2&3\end{pmatrix}$ 的行列式等于 8. Φ_1 和 Φ_2 作为 $G_{p'}$ 上函数有以下分解:

$$\Phi_1=4\phi_1+2\phi_2,$$

$$\Phi_2=2\phi_1+3\phi_2.$$

(b) char.$k=3$ 的情形. 存在 4 个 $3'$ 类, 其代表元为: $\mathbf{1}_G$, (12), (12)(34), (1234). 有 4 个不可约 k 表示. 另一方面, 特征标 χ_1, χ_2, χ_4, χ_5 的模 3 约化仍然不可约: 前 2 个次数为 1, 显然不可约; 后 2 个的不可约性可从其次数等于整除群阶的最高次 3 幂这个事实得到 (见命题 (9.5.10) (c)). 这 4 个 Brauer 特征标两两互异且不可约, 分别记作 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$. 则有下表:

	$\mathbf{1}_G$	(12)	(12)(34)	(1234)
ϕ_1	1	1	1	1
ϕ_2	1	−1	1	−1
ϕ_3	3	1	−1	−1
ϕ_4	3	−1	−1	1

由于作为 $G_{p'}$ 上函数有等式 $\chi_3=\phi_1+\phi_2$, 我们有如下分解矩阵 $\mathbf{D}$ 和 Cartan 矩阵 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.\qquad \mathbf{C}=\mathbf{D}\cdot{}^t\mathbf{D}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \det(\mathbf{C})=3.$$

对应于射影不可分解模的特征标 $\Phi_1,\ldots,\Phi_4$ (见 (10.1.2) (g)) 为:

$$\Phi_1=\chi_1+\chi_3,\quad \Phi_2=\chi_2+\chi_3,\quad \Phi_3=\chi_4,\quad \Phi_4=\chi_5.$$

注 关于 Φ_3 和 Φ_4 的简单表达式, 见命题 (9.5.10) (c).

(10.1.18) 交代群 A_5 群 A_5 由数集 $\{1,2,3,4,5\}$ 上所有偶置换组成 (见 (4.2.6)), 含 60 个元素, 分成 5 个共轭类:

单位元 1_G; (12)(34) 的 15 个 2 阶共轭元; (123) 的 20 个 3 阶共轭元; $s = (12345)$ 的 12 个 5 阶共轭元; s^2 的 12 个 5 阶共轭元. 5 个不可约特征标 χ_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, 的取值如下:

	1_G	(12)(34)	(123)	s	s^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	z	z'
χ_3	3	-1	0	z'	z
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

这里 $z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $z' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. 设 ρ_i 是 A_5 的以 χ_i 为特征标的表示, $1 \leqslant i \leqslant 5$. 则

ρ_1: 单位表示;

ρ_2 和 ρ_3: 在域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 中实现并在域 $\mathbb{Q}$ 上共轭的 2 个 3 次表示. 注意 $\{\pm 1\} \times A_5$ 同构于型 H_3 的 Coxeter 群, 其 Coxeter 生成元 $r_1 = (-1,(14)(23))$, $r_2 = (-1,(12)(45))$, $r_3 = (-1,(12)(34))$ 满足关系式 $(r_1r_2)^5 = (r_2r_3)^3 = (r_1r_3)^2 = 1$. 则 ρ_2 恰为该群的反射表示 λ 在子群 $A_5 \cong \{1\} \times A_5$ 上的限制, 而 ρ_3 等于 λ 与该群的符号表示的张量积在子群 A_5 上的限制 (见 Bourbaki [2], Ch. VI, p.231, ex.11).

ρ_4: 在域 $\mathbb{Q}$ 中实现的 4 次表示, 由 A_5 在 $\{1,2,3,4,5\}$ 上的置换表示中去掉单位表示而得.

ρ_5: 在域 $\mathbb{Q}$ 上实现的 5 次表示, 由 A_5 在其 6 个 5 阶子群上的置换表示中去掉单位表示而得.

按情形 $p = 2,3,5$ 分别确定 A_5 的不可约 Brauer 特征标.

(a) char.$k = 2$ 的情形. A_5 有 4 个 $2'$ 共轭类, 因此有 4 个不可约 Brauer 特征标, 其中 2 个显然: 单位特征标; χ_4 在 $G_{2'}$ 上的限制 (见命题 (9.5.10)(c)). 另一方面, 作为 $G_{2'}$ 上函数, 有等式 $\chi_2 + \chi_3 = \chi_1 + \chi_5$. 2 个 3 次不可约表示的模 2 约化是可约的 (由于 $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}_2$, 它们的特征标在 2 进数域 $\mathbb{Q}_2$ 上共轭) . 它们之中的每一个在 $G_0(k[G])$ 中分解为单位表示和一个 2 次不可约表示的和. 此时 A_5 的不可约 Brauer 特征标 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ 由下表给出:

	1_G	(123)	s	s^2
ϕ_1	1	1	1	1
ϕ_2	2	-1	$z-1$	$z'-1$
ϕ_3	2	-1	$z'-1$	$z-1$
ϕ_4	4	1	-1	-1

作为 $G_{2'}$ 上的函数, 有等式

$$\chi_1=\phi_1,\quad \chi_2=\phi_1+\phi_2,\quad \chi_3=\phi_1+\phi_3,\quad \chi_4=\phi_4,\quad \chi_5=\phi_1+\phi_2+\phi_3.$$

由此得到矩阵 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{C}$ 如下:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&2&2&0\\2&2&1&0\\2&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \det(\mathbf{C})=4.$$

(b) $\mathrm{char}.k=3$ 的情形. A_5 有 4 个不可约 k 特征标, 分别为次数等于 1, 3, 4 (其中次数 3 的有 2 个) 的不可约 R 表示的模 3 约化. 进而, 作为 $G_{3'}$ 上函数有等式 $\chi_5=\chi_1+\chi_4$. 因此有

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix},\quad \det(\mathbf{C})=3.$$

(c) $\mathrm{char}.k=5$ 的情形. A_5 有 3 个不可约 k 特征标, 分别是次数等于 1, 3, 5 的不可约 R 表示的模 5 约化 (其中 2 个次数 3 的不可约 R 表示有同构的模 5 约化). 进而, 作为 $G_{5'}$ 上函数有等式 $\chi_4=\chi_1+\chi_3$. 因此有

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \det(\mathbf{C})=5.$$

习　题

1. 本题不假定群 G 有限, 也不假定 $\mathrm{char}.k\neq 0$.

(a) 设 E 和 E' 是半单 $k[G]$ 模. 设对于每个 $s\in G$, 关于不定元 T 的多项式 $\det(1+s_E T)$ 和 $\det(1+s_{E'}T)$ 都相等. 证明: $E\cong E'$ (提示 归结到 k 是代数闭域的情形, 然后参照定理 (10.1.5) 的证明部分 (a) 的方法).

(b) 如果 E 是半单 $k[G]$模, 且所有的 s_E, $s\in G$, 都是幂幺变换 (称 E 上线性变换 τ 为**幂幺变换**, 如果存在某 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $(\tau-1_E)^k=0$), 则 G 平凡地作用在 E 上 (Kolchin 定理).

2. 设 $H\leqslant G$, 设 L 是以 λ 为 Brauer 特征标的 $k[H]$ 模. 定义 $G_{p'}$ 上类函数 λ^G 如下:

$$\lambda^G(x)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot\lambda(yxy^{-1}),\ \ \forall\, x\in G_{p'},\ \ 这里\ \dot\lambda(z)=\begin{cases}\lambda(z), & 如果\ z\in H,\\ 0, & 如果\ z\in G\setminus H.\end{cases}$$

证明: λ^G 是诱导 $k[G]$ 模 L^G 的 Brauer 特征标.

提示 由 §4.2 知: 存在 H 的 R 广义特征标 $\tilde\lambda$ 使得 $\bar{\tilde\lambda}=\lambda$. 可写 $\tilde\lambda=\mu-\nu$, 其中 μ 和 ν 分别是由 $K[H]$ 模 M 和 N 提供的特征标. 于是 $d([M]-[N])=[L]\in G_0(k[H])$. 因为 d 与 Ind_H^G 可交换, 所以 $d([M^G]-[N^G])=[L^G]\in G_0(k[G])$. 由 (10.1.2)(f) 知: L^G 的 Brauer 特征标是 $(\mu-\nu)^G|_{G_{p'}}=\lambda^G$.

3. 设 $H\leqslant G$, $\zeta\in\mathrm{Bch}(G)$, $\xi\in\mathrm{Bch}(H)$. 证明:

(a) $\zeta|_{H_{p'}}\cdot\xi\in\mathrm{Bch}(H)$ 和 $\zeta\cdot\xi^G\in\mathrm{Bch}(G)$.

(b) $\zeta\cdot\xi^G=(\zeta|_{H_{p'}}\cdot\xi)^G\in\mathrm{Bch}(G)$.

提示 利用习题 2 与定理 (5.2.4) 的证明.

4. 设 $\mathbf{D}$ 是群 G 的分解矩阵. 则 $\mathbf{D}^t\mathbf{D}=\mathbf{C}$ 是 G 的 Cartan 矩阵 ($\mathbf{C}$ 的行与列均以 $\mathrm{IBr}(G)$ 作指标集). 对于 $\phi,\psi\in\mathrm{cf}_K(G)\bigcup\mathrm{cf}_K(G_{p'})$, 记 $(\phi,\psi)_{p'}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G_{p'}}\phi(x)\psi(x^{-1})$. 定义矩阵 $\Gamma=((\phi,\psi)_{p'})_{\phi,\psi\in\mathrm{IBr}(G)}$. 证明: $\Gamma=\mathbf{C}^{-1}$.

提示 设 $\mathbf{X}_0$ 是群 G 的特征标表中对应于 p' 共轭类的部分, 设 $\mathbf{Y}$ 是群 G 的 Brauer 特征标表. 证明: $\mathbf{X}_0=\mathbf{DY}$.

5. 回忆 (10.1.8) 里的记号 $\mathrm{cf}_K(G;G_{p'})$. 证明:

(a) $\{\Phi_\varphi\mid\varphi\in\mathrm{IBr}(G)\}$ 形成向量空间 $\mathrm{cf}_K(G;G_{p'})$ 的一组 K 基.

(b) 如果 $\chi\in\mathrm{ch}_K(G)\bigcap\mathrm{cf}_K(G;G_{p'})$, 则 χ 可表为 $\{\Phi_\varphi\mid\varphi\in\mathrm{IBr}(G)\}$ 里元素的 $\mathbb{Z}$ 线性组合.

6. (a) 证明: 群 G 的二个 Brauer 特征标的乘积仍是 G 的 Brauer 特征标.

(b) 设 $\varphi,\mu\in\mathrm{IBr}(G)$. 定义 G 上类函数 Ξ 如下: $\Xi(x)=\Phi_\varphi(x)\mu(x)$, 如果 $x\in G_{p'}$; $\Xi(x)=0$, 如果 $x\in G\setminus G_{p'}$. 证明: Ξ 是 $\{\Phi_\nu\mid\nu\in\mathrm{IBr}(G)\}$ 里元素的非负整线性组合.

(c) 设 $\varphi,\mu\in\mathrm{IBr}(G)$. 证明: $\Phi_\varphi\Phi_\mu$ 是 $\{\Phi_\nu\mid\nu\in\mathrm{IBr}(G)\}$ 里元素的非负整线性组合.

7. (a) 设 $x\in G$ 和 $\varphi\in\mathrm{IBr}(G)$. 证明: $\frac{\Phi_\varphi(x)}{|C_G(x)|_p}\in R$.

(b) 对于任何 $x\in G_{p'}$, 定义集合 $S_{p'}(x)=\{g\in G\mid g_{p'}\sim_G x\}$, 称之为 G 的一个 p' **截面**. 证明: G 的一个 p' 截面 $S_{p'}(x)$ 上的**特征函数** γ (即 γ 在 $S_{p'}(x)$ 上取常值 1 而在 $G\setminus S_{p'}(x)$ 上取零值) 是 $\mathrm{Irr}_K(G)$ 里元素的 R 线性组合.

提示 记 $\gamma=\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)}a_\varphi\hat\varphi$, 这里 $\hat\varphi$ 是 φ 在 G 上的零扩充, $a_\varphi\in K$. 注意: $a_\theta=(\gamma,\Phi_\theta)_{p'}=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G_{p'}\bigcap S_{p'}(x)}\Phi_\theta(y^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in\mathrm{Cl}(x)}\Phi_\theta(y^{-1})=\frac{\Phi_\theta(x^{-1})}{|C_G(x)|}$, $\forall\theta\in\mathrm{IBr}(G)$, 然后利用 (a) 的结论及 $\hat\varphi$ 是 $\mathrm{Irr}_K(G)$ 里元素的 $\mathbb{Z}$ 线性组合的事实.

8. 定义 $G_{p'}$ 上函数 $1_{G_{p'}}$ 如下: $1_{G_{p'}}(g)=1, \forall g\in G_{p'}$. 证明: $1_{G_{p'}}$ 属于 $\mathrm{Bch}(G)$ (称之为 G 的 **Brauer 主特征标**), 且 $\forall \varphi\in\mathrm{Bch}(G), 1_{G_{p'}}$ 是 $\varphi\varphi^*$ 的不可约分量.

9. 设 $\varphi,\mu\in\mathrm{IBr}(G)$. 证明: $\mu\Phi_\varphi=\sum_{\gamma\in\mathrm{IBr}(G)}a_\gamma\Phi_\gamma$, 这里 a_γ 是 φ 在 Brauer 特征标 $\gamma\mu^*$ 里出现的重数.

10. **(Brauer 特征标的 Brauer 诱导定理)** 证明: $\mathrm{Bch}(G)=\sum_{H\in\mathcal{E}}\mathrm{Bch}(H)^G$, 这里 $\mathcal{E}$ 是 G 的所有初等子群组成的集合, $\mathrm{Bch}(H)^G=\{\lambda^G\mid\lambda\in\mathrm{Bch}(H)\}$.

提示 据定理 (7.2.1) 知: $1_G=\sum a_i\lambda_i^G$, 这里 $a_i\in\mathbb{Z}$, $\lambda_i\in\mathrm{ch}_K(H_i)$, $H_i\in\mathcal{E}$. 限制到 $G_{p'}$ 得 $(1_G)_{G_{p'}}=\sum a_i\lambda_i^G|_{G_{p'}}$. 证明: $\lambda_i|_{(H_i)_{p'}}\in\mathrm{Bch}(H_i)$ 和 $\lambda_i^G|_{G_{p'}}=(\lambda_i|_{(H_i)_{p'}})^G$. 利用习题 2 的结果证明: Brauer 特征标 $(1_G)_{G_{p'}}$ 是 $\{(\mathrm{Bch}(H_i)^G\mid H_i\in\mathcal{E}\}$ 中元素的 $\mathbb{Z}$ 线性组合. 最后利用习题 3 与定理 (7.2.1) 的证明思路完成证明.

§10.2 块的理论

当 $p\mid|G|$ 时, 块的理论是 Brauer 模表示理论的核心. 对于每个 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$, 存在代数同态 $\omega_\chi: Z(K[G])\longrightarrow K$ (见 §4.4). 函数 ω_χ 由其在类和 F 上的值所完全确定, 这里 $\{F=\sum_{x\in\mathcal{F}}x\mid\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)\}$ 形成 $Z(K[G])$ 的一组 K 基 (本节里我们常以手写体字母记共轭类, 而以对应的罗马体字母记相应的类和). 值 $\omega_\chi(F)$ 属于 R (见定理 (4.4.5)).

(10.2.1) 定义 *对于 $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}_K(G)$, 写 $\chi\sim\psi$, 如果 $\overline{\omega_\chi(F)}=\overline{\omega_\psi(F)},\forall\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)$. 这建立了集合 $\mathrm{Irr}_K(G)$ 上的等价关系.*

(10.2.2) 定义 *群 G 的 p 块 (或简称块) 是满足以下条件的非空集 $B\subseteq\mathrm{Irr}_K(G)\bigcup\mathrm{IBr}(G)$:*

(a) $B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)$ 是关于关系 $\sim$ 的一个等价类.

(b) $B\bigcap\mathrm{IBr}(G)=\{\phi\in\mathrm{IBr}(G)\mid$ 存在某 $\chi\in B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)$ 使得 $d_{\chi\phi}\neq0\}$ (见 §10.1,(4)).

(10.2.3) 定理 *令 $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}_K(G)$. 则 χ 和 ψ 属于相同的 p 块当且仅当 $\omega_\chi(C)-\omega_\psi(C)\in\mathfrak{m}$, 这里 C 取遍 G 的类和.*

证 "当" 部分的结论显然. 现要证明 "仅当" 部分. 设 $\chi\sim\psi$. 固定类和 C. 令 $\alpha=\omega_\chi(C)-\omega_\psi(C)$. 只要证明: 存在某 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\alpha^n\in\mathfrak{m}$ (因极大理想 $\mathfrak{m}$ 是根理想 (radical ideal), 这推出 $\alpha\in\mathfrak{m}$). 令 $\mathcal{G}=\mathrm{Gal}\,\mathbb{Q}(\epsilon)/\mathbb{Q}$ 和 $\sigma\in\mathcal{G}$, 这里 ϵ 是本原 $|G|$ 次单位根. 则等式 $\epsilon^\sigma=\epsilon^m$ 对于某与 $|G|$ 互素的 $m\in\mathbb{N}$ 成立. 设 $g\in\mathcal{C}$ (与 C 相对应的共轭类). 则 $\chi(g)^\sigma=\chi(g^m)$. 因为 $\langle g\rangle=\langle g^m\rangle$, 所以 $|C_G(g)|=|C_G(g^m)|$. 设 L 是含 g^m 的共轭类的类和. 由 §4.4, (1) 式推出 $\omega_\chi(C)^\sigma=\omega_\chi(L)$. 类似地, 有 $\omega_\psi(C)^\sigma=\omega_\psi(L)$. 因此由 $\chi\sim\psi$ 可推出 $\alpha^\sigma=\omega_\chi(L)-\omega_\psi(L)\in\mathfrak{m}$. 令 $f(x)=\prod_{\sigma\in\mathcal{G}}(x-\alpha^\sigma)$. 则 $f(x)\in(\mathbb{Q}\bigcap R)[x]=\mathbb{Z}[x]$. 由于 $\alpha^\sigma\in\mathfrak{m}, \forall\sigma\in\mathcal{G}$, 多

项式 f 的除首项系数之外的所有系数都属于 $\mathfrak{m}\bigcap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}$. 于是, $0=f(\alpha)\equiv\alpha^n$ (mod $\mathfrak{m}$), 这里 $n=|\mathcal{G}|$. 证毕. □

(10.2.4) 尽管由 p 块的定义知: 每个 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$ 属于唯一 p 块, 但是, "这种划分是否也适用于 $\mathrm{IBr}(G)$ 里的元素?" 就不很明显了. 为了解决这个问题, 我们要将 G 的 p 块同 $k[G]$ 的中心 $Z(k[G])$ 联系起来. 将模 $\mathfrak{m}$ 约化映射 $\overline{\cdot}:R\longrightarrow k$ 扩充为环同态 $\overline{\cdot}:R[G]\longrightarrow k[G]$ 使得 $\overline{g}=g,\forall g\in G$, 这里将 $R[G]$ 的元素看作 G 中元素的 R 线性组合. 因为类和 $F,\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)$, 形成 $Z(K[G])$ 的 K 基, 所以其像 $\overline{F}$ 也形成 $Z(k[G])$ 的 k 基. 这推出 $Z(R[G])=R[G]\bigcap Z(K[G])$ 被 $\overline{\cdot}$ 映到 $Z(k[G])$ 上.

现设 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$. 则 ω_χ 将 $Z(R[G])$ 映到 R 内. 定义映射 $\overline{\omega_\chi}:Z(k[G])\longrightarrow k$ 使得 $\overline{\omega}_\chi(\overline{z})=\overline{\omega_\chi(z)}$, $\forall z\in Z(R[G])$. 这样的定义是有意义的: 如果 $z_1,z_2\in Z(R[G])$ 满足 $\overline{z}_1=\overline{z}_2$, 则 z_1-z_2 的系数属于 $\mathfrak{m}$, 因此 $\overline{\omega_\chi(z_1-z_2)}=0$. 容易验证: $\overline{\omega_\chi}$ 是 k 代数同态. 如果 $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}_K(G)$, 则 $\overline{\omega_\chi}=\overline{\omega_\psi}$ 当且仅当 $\chi\sim\psi$, 即当且仅当 χ 和 ψ 属于相同的 p 块. 令 $\mathrm{Bl}(G)$ 为群 G 的 p 块集合. 对于 $B\in\mathrm{Bl}(G)$, 可记 $\lambda_B:=\overline{\omega_\chi}$, 这里 χ 在 $B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)$ 里任意选取. 则由定理 (10.2.3) 推出:

(10.2.5) 推论 *$B\mapsto\lambda_B$ 是从 $\mathrm{Bl}(G)$ 到 k 代数同态集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(k[G]),k)$ 内的 1-1 对应.*

(10.2.6) 定理 *设 $\phi\in\mathrm{IBr}(G)$. 则 ϕ 属于唯一的块 $B\in\mathrm{Bl}(G)$. 如果 (ρ,V) 是提供 Brauer 特征标 ϕ 的 k 表示, 则 $\rho(u)=\lambda_B(u)1_V$, $\forall u\in Z(k[G])$, 这里 1_V 是 V 上恒等变换.*

证 由推论 (10.1.12) 知: 存在某 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$ 使得 $d_{\chi\phi}\neq0$. 设块 $B\in\mathrm{Bl}(G)$ 含 χ. 则 $\phi\in B$. 设 G 的 k 表示 ρ 提供 Brauer 特征标 ϕ. 如果我们能证明: $\rho(u)=\lambda_B(u)1_V,\forall u\in Z(k[G])$, 则该等式唯一确定了 λ_B, 因而由推论 (10.2.5) 知它也确定了 B. 令 η 为 G 的提供特征标 χ 的 K 表示. 则存在 G 的 k 表示 $\overline{\eta}$ 使得 $d([\eta])=[\overline{\eta}]$, 且 $\overline{\eta}$ 提供 Brauer 特征标 $\hat{\chi}$ (见 (10.1.2) (f)). 由 $\mathrm{IBr}(G)$ 的线性无关性 (见定理 (10.1.5)) 知: ρ 作为 $\overline{\eta}$ 的分支有重数 $d_{\chi\phi}>0$. 现令 $u\in Z(k[G])$. 则存在某 $z\in Z(R[G])$ 使得 $u=\overline{z}$. 于是,

$$\overline{\eta}(u)=\overline{\eta(z)}=\overline{(\omega_\chi(z)1_V)}=\overline{\omega_\chi}(u)1_V=\lambda_B(u)1_V.$$

由于 ρ 是 $\overline{\eta}$ 的分支, 定理得证. □

(10.2.7) 定义 *群 G 关于素数 p 的 **Brauer 图** 是这样的一个图, 它的顶点集是 $\mathrm{Irr}_K(G)$; 二个顶点 $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}_K(G)$ 以边相连, 如果存在某 $\phi\in\mathrm{IBr}(G)$ 使得 $d_{\chi\phi}\neq0\neq d_{\psi\phi}$.*

如果 χ 和 ψ 通过 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ 相连, 则 χ 和 ψ 属于同一个 p 块 (记作 B), 由定理 (10.2.6) 知 B 是含有 ϕ 的唯一 p 块. 这推出:

(10.2.8) 推论 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 集合 $B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$ 是 Brauer 图的一些连通分支的顶点集之并.

下面要证明更强的结论: $B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$ 是 Brauer 图的单个连通分支的顶点集.

(10.2.9) 定义 对于 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$, 定义

$$\Phi_\phi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} d_{\chi\phi}\chi.$$

(10.2.10) 引理 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Irr}_K(G)$ 是 Brauer 图的一些连通分支的顶点集之并, 定义集合 $\mathcal{B} = \{\phi \in \mathrm{IBr}(G) \mid d_{\chi\phi} \neq 0 \text{ 对于某 } \chi \in \mathcal{A}\}$. 令 $y \in G$ 和 $x \in G_{p'}$. 则

$$\sum_{\chi \in \mathcal{A}} \chi(x)\chi(y^{-1}) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}} \phi(x)\Phi_\phi(y^{-1}). \tag{1}$$

证 据块的定义 (10.2.2) 知: 集合 $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$ 是群 G 的一些块之并. 对于 $\chi \in \mathcal{A}$, 有 $d_{\chi\mu} = 0$, $\forall \mu \in \mathrm{IBr}(G) \setminus \mathcal{B}$. 因此由 §10.1,(4) 式得:

$$\chi(x) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}} d_{\chi\phi}\phi(x), \qquad \forall\, x \in G_{p'}.$$

如果 $\phi \in \mathcal{B}$, 则 $d_{\xi\phi} = 0$, $\forall \xi \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus \mathcal{A}$. 因此由 (10.2.9) 得:

$$\Phi_\phi(y) = \sum_{\chi \in \mathcal{A}} d_{\chi\phi}\chi(y), \qquad \forall\, y \in G.$$

这推出:

$$\sum_{\chi \in \mathcal{A}} \chi(x)\chi(y^{-1}) = \sum_{\substack{\chi \in \mathcal{A} \\ \phi \in \mathcal{B}}} d_{\chi\phi}\phi(x)\chi(y^{-1}) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}} \phi(x)\Phi_\phi(y^{-1}). \qquad \square$$

(10.2.11) 推论 对于 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ 和 $y \in G \setminus G_{p'}$, 有等式 $\Phi_\phi(y) = 0$. 进而, 群 G 的任意 Sylow p 子群 P 的阶数 $|P|$ 整除 $\Phi_\phi(1_G)$.

证 令 $x \in G_{p'}$. 则 x 和 y 在 G 里不共轭. 由定理 (4.2.5) (即特征标的第二正交关系) 知:

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)} \chi(x)\chi(y^{-1}) = 0.$$

将引理 (10.2.10) 用于情形 $\mathcal{A}=\mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $\mathcal{B}=\mathrm{IBr}(G)$ 得:

$$\sum_{\phi\in\mathrm{IBr}(G)}\phi(x)\Phi_\phi(y^{-1})=0. \tag{2}$$

因为等式 (2) 对于任何 $x\in G_{p'}$ 都成立, 所以由 $\mathrm{IBr}(G)$ 的线性无关性知: $\Phi_\phi(y^{-1})=0,\ \forall\phi\in\mathrm{IBr}(G)$. 由于 y 属于 $G\setminus G_{p'}$ 当且仅当 y^{-1} 属于 $G\setminus G_{p'}$, 等式 $\Phi_\phi(y)=0$ 对于所有 $\phi\in\mathrm{IBr}(G)$ 和 $y\in G\setminus G_{p'}$ 都成立. 第二个结论可由等式 $|P|((\Phi_\phi)_P,\mathbf{1}_P)_P=|P|\cdot\dfrac{1}{|P|}\sum_{x\in P}\Phi_\phi(x)=\Phi_\phi(\mathbf{1}_G)$ 和 $((\Phi_\phi)_P,\mathbf{1}_P)_P\in\mathbb{Z}$ 得到. □

(10.2.12) 推论 (弱块正交性) 设 $x\in G_{p'}$, $y\in G\setminus G_{p'}$ 和 $B\in\mathrm{Bl}(G)$. 则

$$\sum_{\chi\in B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)}\chi(x)\chi(y^{-1})=0. \tag{3}$$

证 在引理 (10.2.10) 中取 $\mathcal{A}=\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 和 $\mathcal{B}=\mathrm{IBr}(G)\bigcap B$. 由推论 (10.2.11) 知: $\Phi_\phi(y^{-1})=0,\ \forall\phi\in\mathrm{IBr}(G)$. 故 (3) 式从 (1) 式推得. □

(10.2.13) 对于 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$, 令 $e_\chi\in Z(K[G])$ 为 χ 所对应的本原幂等元:

$$e_\chi=\frac{\chi(\mathbf{1}_G)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g\qquad(\text{见定理 (4.2.1)}). \tag{4}$$

一般而言, e_χ 不必属于关于 p 的局部整数环 $R[G]$. 所以不总能对 e_χ 施以模 m 约化映射 $\bar{\ }$ 而得到 $k[G]$ 的相应幂等元. 因为 $\mathrm{Irr}_K(G)$ 里的 $\chi\neq\psi$ 满足正交关系 $e_\chi e_\psi=0$ (见 §4.2.), 所以 $Z(K[G])$ 里的不同幂等元 e_χ 的和仍是幂等元. 我们要考虑幂等元的这种和式, 它落在 $R[G]$ 里.

(10.2.14) 定理 (Osima) *设 $\mathcal{A}$ 是 Brauer 图的一个连通分支的顶点集. 令 $f=\sum_{\chi\in\mathcal{A}}e_\chi$. 写 $f=\sum_{g\in G}a_g g$, 其中 $a_g\in K$. 则*

(a) $a_g=(1/|G|)\sum_{\chi\in\mathcal{A}}\chi(\mathbf{1}_G)\chi(g^{-1})$.

(b) $a_g\in R,\ \forall g\in G$.

(c) $a_g=0$ *如果* $p\mid o(g)$.

证 结论 (a) 可从关于幂等元 e_χ 的表达式 (4) 直接得到. 由 (a) 和在公式 (1) 里取 $x=\mathbf{1}_G$ 与 $y=g$ 得:

$$a_g=\frac{1}{|G|}\sum_{\phi\in\mathcal{B}}\phi(\mathbf{1}_G)\Phi_\phi(g^{-1}),$$

这里 $\mathcal{B}=\{\phi\in\mathrm{IBr}(G)\mid d_{\chi\phi}\neq0\ \text{对于某}\chi\in\mathcal{A}\}$. 如果 $p\mid o(g)$, 则由推论 (10.2.11) 得: $\Phi_\phi(g^{-1})=0$, 这证明了 (c). 现设 $p\nmid o(g)$. 由 (a) 和在公式 (1) 里取 $x=g^{-1}$ 与 $y=\mathbf{1}_G$ 得:

$$a_g=\frac{1}{|G|}\sum_{\phi\in\mathcal{B}}\Phi_\phi(\mathbf{1}_G)\phi(g^{-1}).$$

再由推论 (10.2.11) 知: $\Phi_\phi(1_G)$ 可被整除 $|G|$ 的最高次 p 幂整除. 因此 $\Phi_\phi(1_G)/|G| \in R$. 由于 $\phi(g^{-1}) \in R$ (见 (10.1.1)), 这推出 $a_g \in R$, (b) 得证. □

(10.2.15) 定理 (a) Brauer 图的连通分支的顶点集恰为形如 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ $(B \in \mathrm{Bl}(G))$ 的集合;

(b) 每个满足 $\sum_{\chi\in\mathcal{A}} e_\chi \in R[G]$ 的集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Irr}_K(G)$ 是形如 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ $(B \in \mathrm{Bl}(G))$ 的集合之并.

证 先证明 (b). 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 所对应的表示是 (ρ, V). 则 $\rho(e_\chi) = 1_V$, 且 $\rho(e_\psi) = 0, \forall\psi \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus \{\chi\}$. 于是, $\omega_\chi(e_\psi) = \delta_{\chi\psi}, \forall\chi, \psi \in \mathrm{Irr}_K(G)$. 由假设知 $f := \sum_{\chi\in\mathcal{A}} e_\chi \in R[G]$. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$. 则 $\chi \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $\omega_\chi(f) = 1$; $\chi \notin \mathcal{A}$ 当且仅当 $\omega_\chi(f) = 0$. 于是, $\chi \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $\overline{\omega_\chi(f)} \neq 0$. 取定 $B \in \mathrm{Bl}(G)$. 则值 $\overline{\omega_\chi(f)}$ 当 χ 在 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 里变动时保持不变. 这表明 $\mathcal{A}$ 是一些形如 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 的集合之并, 其中每个 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 都含有满足 $\overline{\omega_\chi(f)} \neq 0$ 的某 χ. (b) 得证. 现设 $\mathcal{A}$ 是 Brauer 图的一个连通分支的顶点集. 由定理 (10.2.14) (b) 知: $\sum_{\chi\in\mathcal{A}} e_\chi \in R[G]$. 因此由 (b) 知 $\mathcal{A}$ 是形如 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 的集合之并. 由推论 (10.2.8) 知: 每个 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 是 Brauer 图的一些连通分支顶点集的并. 这表明 $\mathcal{A}$ 本身是某一个 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$. (a) 得证. □

至此我们已得到关于集合 $B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)$ 的如下几种等价描述:

(10.2.16) 定理 关于 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Irr}_K(G)$ 的以下描述等价:

(a) 存在某 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 使得 $\mathcal{A} = B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)$.

(b) $\mathcal{A}$ 是关于关系 $\sim$ 的一个等价类.

(c) $\mathcal{A}$ 是 Brauer 图的一个连通分支的顶点集.

(d) $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{Irr}_K(G)$ 的满足关系 $\sum_{\chi\in\mathcal{A}} e_\chi \in R[G]$ 的极小非空子集.

证 (a) 与 (b) 的等价性由块的定义直接得到. 然后由定理 (10.2.15) (a) 推出 (a) 与 (c) 的等价性. 最后, 由 (a) 与 (c) 的等价性以及定理 (10.2.14)—(10.2.15) 推出 (a) 与 (d) 的等价性. □

以下结果强化了定理 (10.1.14).

(10.2.17) 引理 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, $\phi \in \mathrm{IBr}(G)\bigcap B$. 则 ϕ 是形如 $\hat{\chi}(\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B)$ 的 Brauer 特征标的 $\mathbb{Z}$ 线性组合.

证 据定理 (10.1.14) 知: 存在 $b_\chi \in \mathbb{Z}$ 使得 $\phi = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} b_\chi\hat{\chi}$. 写 $\phi = \phi_B + \phi_0$, 这里

$$\phi_B = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B} b_\chi\hat{\chi} \quad , \quad \phi_0 = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\setminus B} b_\chi\hat{\chi}.$$

将 ϕ_B 和 ϕ_0 分别写成 $\mathrm{IBr}(G)$ 里元素的线性组合. 由块的定义知: 当 $\chi \in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $\mu \in \mathrm{IBr}(G)\setminus B$ 时, 有 $d_{\chi\mu} = 0$. 故 ϕ_B 是 $B\bigcap \mathrm{IBr}(G)$ 里元素的线性组合. 当 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)\setminus B$ 和 $\mu \in B\bigcap \mathrm{IBr}(G)$ 时, 有 $d_{\chi\mu} = 0$. 故 ϕ_0 是 $\mathrm{IBr}(G)\setminus B$ 里元素的线性组合. 于是, 由 $\mathrm{IBr}(G)$ 的线性无关性知: $\phi = \phi_B$. □

(10.2.18) 定理 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, $\chi \in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$. 则 $|B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)| \geqslant |B\bigcap \mathrm{IBr}(G)|$, 且以下条件等价:

(a) $|B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)| = |B\bigcap \mathrm{IBr}(G)|$.

(b) $p \nmid (|G|/\chi(\mathbf{1}_G))$.

(c) $B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G) = \{\chi\}$.

当等价条件成立时, 有等式 $B\bigcap \mathrm{IBr}(G) = \{\hat{\chi}\}$.

证 设 $\mathbf{D} = (d_{\chi\phi})$ 是分解矩阵, 由定理 (10.1.11) 知: $\mathbf{D}$ 的列向量线性无关. 设 $\mathbf{D}_B$ 是其行与列的标号都对应于 B 中元素的子矩阵. 由块的定义知: 对于每个 $\phi \in B\bigcap \mathrm{IBr}(G)$, $\mathbf{D}$ 的以 ϕ 标号的列向量在子矩阵 $\mathbf{D}_B$ 外的分量都是零. 这个事实与 $\mathbf{D}$ 的列向量的线性无关性一起可推出 $\mathbf{D}_B$ 的列向量也线性无关. 于是, $\mathbf{D}_B$ 的行数不少于其列数, 即 $|B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)| \geqslant |B\bigcap \mathrm{IBr}(G)|$. 现设 (a) 成立. 则 $\mathbf{D}_B$ 是可逆方阵. 令 $\mathbf{D}_B^{-1} = (a_{\phi\chi})$, 这里 $\phi \in B\bigcap \mathrm{IBr}(G)$, $\chi \in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$. 固定 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$. 则有

$$\sum_{\phi\in B\bigcap \mathrm{IBr}(G)} a_{\phi\chi}\Phi_\phi = \sum_{\xi\in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)} \left(\sum_{\phi\in B\bigcap \mathrm{IBr}(G)} d_{\xi\phi}a_{\phi\chi}\right)\xi = \chi. \tag{5}$$

这二个等式成立是由于

$$\Phi_\phi = \sum_{\xi\in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)} d_{\xi\phi}\xi, \qquad \sum_{\phi\in B\bigcap \mathrm{IBr}(G)} d_{\xi\phi}a_{\phi\chi} = \delta_{\xi\chi}.$$

因此 χ 是 Φ_ϕ 的线性组合, 据推论 (10.2.11) 知: χ 在 $G\setminus G_{p'}$ 上取零值. 因此对于 G 的任何 Sylow p 子群 P, 有

$$|P|\cdot(\chi_P, \mathbf{1}_P)_P = |P|\cdot\frac{1}{|P|}\sum_{x\in P}\chi(x) = \chi(\mathbf{1}_G).$$

由于 $(\chi_P, \mathbf{1}_P)_P \in \mathbb{Z}$, 这推出 $|G|_p \mid \chi(\mathbf{1}_G)$. 又由定理 (4.4.6) 得: $\chi(\mathbf{1}_G) \mid |G|$. 这证明了 (b). 再设 (b) 成立. 则由定理 (4.2.1) 得:

$$e_\chi = \frac{\chi(\mathbf{1}_G)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g \in R[G].$$

由定理 (10.2.15)(b) 得: $B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G) = \{\chi\}$, (c) 得证. 最后设 (c) 成立. 则

$$0 < |\mathrm{IBr}(G)\bigcap B| \leqslant |\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B| = 1,$$

这推出 (a). 于是, 条件 (a)、(b)、(c) 之间的等价性得证. 现设 $\mathrm{IBr}(G)\bigcap B=\{\phi\}$ 与 $\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B=\{\chi\}$. 由引理 (10.2.17) 知: 存在某 $b\in\mathbb{Z}$ 使得 $\phi=b\hat{\chi}$. 于是, $\hat{\chi}=d_{\chi\phi}\phi=d_{\chi\phi}b\hat{\chi}$. 故 $d_{\chi\phi}b=1$. 由 $d_{\chi\phi}\in\mathbb{N}$ 推出 $b=1$, 进而, $\phi=\hat{\chi}$. □

我们要运用定理 (10.2.14) 导出 G 的 p 块与代数 $Z(k[G])$ 之间的进一步关系.

(10.2.19) 定义 对于 $B\in\mathrm{Bl}(G)$, 写 $f_B=\sum_{\chi\in B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)}e_\chi$, 称之为 **Osima 幂等元**.

由定理 (10.2.16) 知: f_B 落在 $Z(R[G])$ 里. 令 $e_B=\overline{f_B}\in Z(k[G])$. 以 $\mathbf{1}_R$, $\mathbf{1}_k$ 分别记代数 $R[G]$, $k[G]$ 的恒等元.

(10.2.20) 定理 设 $B,B'\in\mathrm{Bl}(G)$, $z\in Z(k[G])$. 则有

(a) $\lambda_B(e_{B'})=\delta_{BB'}$.

(b) e_B 是非零幂等元; 当 $B\neq B'$ 时有 $e_Be_{B'}=0$.

(c) e_B 是 G 的一些 p' 共轭类的类和的 k 线性组合.

(d) $\sum_{B\in\mathrm{Bl}(G)}e_B=\mathbf{1}_k$.

(e) 如果 $\lambda_B(z)=0$, $\forall B\in\mathrm{Bl}(G)$, 则 z 是幂零元.

(f) $B\mapsto\lambda_B$ 给出从集合 $\mathrm{Bl}(G)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(k[G]),k)$ 的双射 (见推论 (10.2.5)).

(g) $Z(k[G])$ 的每个非零幂等元是一些形如 e_B 的幂等元之和.

证 将 §4.4 里所定义的代数同态 ω_χ 从复数域推广到一般的特征零的域 K 上, 即 $\omega_\chi: Z(K[G])\longrightarrow K$. 我们有:

$$\omega_\chi(e_{\chi'})=\delta_{\chi\chi'},\qquad \forall\,\chi,\chi'\in\mathrm{Irr}_K(G)\qquad (\text{见 §4.2 与 §4.4}).$$

这推出: 对于 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $B'\in\mathrm{Bl}(G)$, 有

$$\omega_\chi(f_{B'})=\begin{cases}1, & \text{如果 }\chi\in B',\\ 0, & \text{如果 }\chi\notin B'.\end{cases}$$

如果 $\chi\in B$, 则 $\overline{\omega_\chi}=\lambda_B$ (见 (10.2.4)). (a) 得证.

由 $f_Bf_{B'}=\delta_{BB'}f_B$ 推出 $e_Be_{B'}=\delta_{BB'}e_B$. 又由 $\lambda_B(e_B)=1$ 推出 $e_B\neq 0$. 得 (b).

(c) 可从定理 (10.2.14)(c) 直接得到.

因为 $\sum_{B\in\mathrm{Bl}(G)}f_B=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)}e_\chi=\mathbf{1}_R$, 所以 $\sum_{B\in\mathrm{Bl}(G)}e_B=\overline{\mathbf{1}_R}=\mathbf{1}_k$. (d) 得证.

设 $z \in Z(k[G])$ 满足 (e) 的假设条件. 令 (η, V) 为 G 的不可约 k 表示, 其提供 Brauer 特征标 $\phi \in \mathrm{IBr}(G) \bigcap B$. 据定理 (10.2.6) 知: $\eta(z) = \lambda_B(z)1_V = 0$. 因此 $z \in \mathrm{Rad}.\, k[G]$ 是幂零元. 这证明了 (e).

设 $\lambda : Z(k[G]) \longrightarrow k$ 是代数同态. 则 $\mathrm{Ker}\,\lambda$ 在 $Z(k[G])$ 里有余维数 1, $Z(k[G]) = \mathrm{Ker}\,\lambda + k \cdot \mathbf{1}_k$, λ 由 $\mathrm{Ker}\,\lambda$ 所唯一确定. 如果 $\lambda \neq \lambda_B$, 则 $\mathrm{Ker}\,\lambda_B \not\subseteq \mathrm{Ker}\,\lambda$. 选 $z_B \in \mathrm{Ker}\,\lambda_B$ 使得 $\lambda(z_B) \neq 0$. 假设 $\lambda \notin \{\lambda_B \mid B \in \mathrm{Bl}(G)\}$. 令 $z = \prod_{B \in \mathrm{Bl}(G)} z_B$. 则 $\lambda_B(z) = 0$, $\forall B \in \mathrm{Bl}(G)$. 由 (e) 知 z 是幂零元, 它在从 $Z(k[G])$ 到 k 的任何代数同态下的像均为零. 但是, $\lambda(z) = \prod_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \lambda(z_B) \neq 0$, 引起矛盾. 因此必有 $\lambda \in \{\lambda_B \mid B \in \mathrm{Bl}(G)\}$. 于是, 由推论 (10.2.5) 得 (f).

令 $e \in Z(k[G])$ 为非零幂等元. 则由 (d) 得:

$$e = e\sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} e_B = \sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} ee_B.$$

只要证明: 对于任何固定的 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 等式 $ee_B = 0$ 和 $ee_B = e_B$ 之中必有一个成立. 设 $ee_B \neq 0$. 则由于 ee_B 不是幂零元, 且 $\lambda_{B'}(ee_B) = 0$, $\forall B' \in \mathrm{Bl}(G) \setminus \{B\}$. 因此有 $\lambda_B(ee_B) \neq 0$, 这与 ee_B 是幂等元的事实一起推出: $\lambda_B(ee_B) = 1$. 进而推出: $\lambda_{B'}(e_B(\mathbf{1}_G - e)) = 0, \forall B' \in \mathrm{Bl}(G)$. 由 (e) 知: $e_B(\mathbf{1}_G - e) \in \mathrm{Rad}.\, k[G]$ 是幂零元. 但 $e_B(\mathbf{1}_G - e)$ 也是幂等元. 因此 $e_B(\mathbf{1}_G - e) = 0$, 即 $ee_B = e_B$. (g) 得证. □

(10.2.21) 对于 $A = Z(R[G])$, 存在分解 $\mathbf{1}_A = e_1 + \cdots + e_m$, 其中 e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, 是 A 里两两正交的中心本原幂等元 (见 §6.2). 这给出 $\overline{A} = Z(k[G])$ 中对应的分解 $\mathbf{1}_{\overline{A}} = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_m}$, 其中 $\overline{e_1}$、…、$\overline{e_m}$ 是 $k[G]$ 的中心本原幂等元. 反之, $\mathbf{1}_{\overline{A}} \in \overline{A}$ 的这种分解可提升为 $\mathbf{1}_A$ 的相应分解.

我们有唯一分解式:

$$R[G] = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \qquad (\text{或 } k[G] = \overline{B_1} \oplus \cdots \oplus \overline{B_m}), \tag{6}$$

这里 $B_i = R[G]e_i$ (或 $\overline{B_i} = k[G]\overline{e_i}$) 是 $R[G]$ (或 $k[G]$) 的以 e_i (或 $\overline{e_i}$) 为恒等元的不可分解双边理想.

可以证明: 这些 e_i 正是定义 (10.2.20) 里的 Osima 幂等元 (见习题 4).

因此可称 B_i(或 $\overline{B_i}$) 为 $R[G]$ (或 $k[G]$) 的**块理想**, 称 e_i (或 $\overline{e_i}$), $1 \leqslant i \leqslant m$, 为 $R[G]$ (或 $k[G]$) 的**块幂等元**.

习 题

在本组习题里, 我们总设定 p 模系统 (K, R, k) 里的域 K 关于群 G 充分大.

1. 设 G 是 p' 群. 证明: G 的每个 p 块只含唯一的不可约 Brauer 特征标.

2. 设 G 是 p 群. 证明: G 只有一个 p 块 (该结论可推广到更一般的情形, 见推论 (10.3.12)).

3. (a) 设 $\varphi, \vartheta \in \mathrm{IBr}(G)$ 属于不同的 p 块. 证明: $\sum_{x\in G_{p'}} \varphi(x)\vartheta(x^{-1}) = 0$.

(b) 设 $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 属于不同的 p 块. 证明: $\sum_{x\in G_{p'}} \chi(x)\psi(x^{-1}) = 0$.

4. 证明: $R[G]$ 里的中心本原幂等元 e_i (见 (10.2.21)) 等同于 (10.2.19) 里所定义的 Osima 幂等元.

5. 称不可分解射影 $k[G]$ 模 U, U' 是连接的, 如果存在不可分解射影 $k[G]$ 模序列 $U_1 = U, U_2, \cdots, U_m = U'$ 使得 $\forall 1 \leqslant i < m$, U_i 和 U_{i+1} 至少含有一个相同的合成因子. 显然, 连接关系是等价关系. 证明: $E, E' \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 的射影包 P_E 和 $P_{E'}$ 连接当且仅当 Brauer 特征标 ϕ_E 和 $\phi_{E'}$ 属于同一 p 块.

提示 每个不可分解射影 $k[G]$ 模对应于 $k[G]$ 的一个不可分解射影左理想, 后者由本原幂等元生成 (见 §4.2). 设不可分解射影 $k[G]$ 模的连接类个数为 v. 设 $\{D_1, \cdots, D_v\}$ 是 $k[G]$ 的满足以下条件的左理想集合: 每个 D_i 是属于单个连接类的所有不可分解射影左理想的和; 不同的 D_i 对应于不同的连接类. 首先证明: $D_iD_j = 0, \forall i \neq j$. 接着证明: $D_1, \ldots, D_v$ 是 $k[G]$ 的满足等式 $k[G] = D_1 \oplus \cdots \oplus D_v$ 的双边理想. 再证明: $D_1, \ldots, D_v$ 都是 $k[G]$ 的块理想.

6. (a) 设 G_1 和 G_2 是二个有限群; e_1, e_2 分别是 $k[G_1]$ 和 $k[G_2]$ 的块幂等元. 证明: $e_1 \otimes e_2$ 是 $k[G_1 \times G_2] \cong k[G_1] \otimes k[G_2]$ 的块幂等元.

(b) 证明: 在 (a) 中将域 k 换成环 R 后其结论仍然成立.

7. 设 G_1 和 G_2 是二个有限群; $\{\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{1m_1}\}$ 和 $\{\zeta_{21}, \ldots, \zeta_{2m_2}\}$ 分别是 $\mathrm{Irr}_K(G_1)$ 和 $\mathrm{Irr}_K(G_2)$ 里的 p 块集合. 证明: $\{\zeta_{1i} \cdot \zeta_{2j} \mid 1 \leqslant i \leqslant m_1, 1 \leqslant j \leqslant m_2\}$ 是 $\mathrm{Irr}_K(G_1 \times G_2)$ 里的 p 块集合.

8. 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$.

(a) 设 (ρ, V) 是以 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 为特征标的单 $K[G]$ 模. 证明: $\chi \in B$ 当且仅当 $f_BV = V$; 当 $\chi \notin B$ 时有 $f_BV = 0$.

(b) 设 (τ, M) 是以 $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ 为 Brauer 特征标的单 $k[G]$ 模. 证明: $\varphi \in B$ 当且仅当 $e_BM = M$. 当 $\varphi \notin B$ 时有 $e_BM = 0$.

9. 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$. 证明: 由 $k[G]$ 模 $e_Bk[G]$ 提供的 Brauer 特征标等于

$$\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B} \chi(1)\hat{\chi}.$$

提示 利用习题 8, (b) 的结论.

10. 设 $\theta \in \mathrm{cf}_K(G), z \in K[G]$ 和 $B \in \mathrm{Bl}(G)$. 记 $\theta_B = \sum_{\chi\in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)} (\theta, \chi)\chi$. 证明: $\theta_B(z) = \theta(f_Bz)$.

提示 利用习题 8, (a) 的结论.

§10.3 p 块及其 p 亏群

本节讨论块理论与群 G 的 p 子群之间的关系.

(10.3.1) 定义 设 $\mathcal{H} \in \mathrm{Cl}(G)$. 考虑 $x \in \mathcal{H}$ 在 G 的中心化子 $C_G(x)$ 里的 Sylow p 子群 P. 称这些子群 P 为 $\mathcal{H}$ 的 p 亏群 (或简称亏群).

由命题 (1.1.10) 和定理 (1.1.13) 知: $\mathcal{H}$ 的 p亏群形成 G 的 p 子群的一个共轭类, 记作 $\delta_G(\mathcal{H})$ (或 $\delta(\mathcal{H})$). 以 $H := \sum_{x\in\mathcal{H}} x \in k[G]$ 记对应于 $\mathcal{H}$ 的类和, 这些类和形成 $Z(k[G])$ 的一组 k 基 (见命题 (3.1.7)). 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 记

$$e_B = \sum_{\mathcal{H}\in\mathrm{Cl}(G)} a_B(\mathcal{H})H, \qquad \text{这里 } a_B(\mathcal{H}) \in k \text{ (见定义(10.2.19))}, \tag{1}$$

则 a_B 是唯一确定的从集合 $\mathrm{Cl}(G)$ 到域 k 的函数. 事实上, 由定理 (10.2.14)(a) 和定理 (10.2.16) 知:

$$a_B(\mathcal{H}) = \overline{\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B} \chi(1)\chi(g^{-1})}, \tag{2}$$

其中 g 是 $\mathcal{H}$ 中任意取定的元素. 由定理 (10.2.20) (c) 知: 如果 $\mathcal{H}$ 不是 p' 共轭类, 则 $a_B(\mathcal{H}) = 0$. 由定理 (10.2.20) (a) 知:

$$1 = \lambda_B(e_B) = \sum_{\mathcal{H}\in\mathrm{Cl}(G)} a_B(\mathcal{H})\lambda_B(H). \tag{3}$$

(10.3.2) 定义　由 (3) 式知: 对于每个 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 至少存在一个 $\mathcal{H} \in \mathrm{Cl}(G)$ 使得 $a_B(\mathcal{H}) \neq 0$ 和 $\lambda_B(H) \neq 0$. 称这样的 $\mathcal{H}$ 为 B 的一个亏类.

(10.3.3) 定理 (极小—极大)　令 $\mathcal{H}$ 为 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的一个亏类, $D \in \delta(\mathcal{H})$. 任取 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$, 令 $L = \sum_{x\in\mathcal{L}} x$. 有

(a) 如果 $a_B(\mathcal{L}) \neq 0$, 则 D 包含 $\mathcal{L}$ 的一个亏群.

(b) 如果 $\lambda_B(L) \neq 0$, 则 D 落在 $\mathcal{L}$ 的一个亏群里.

为了证明该定理, 我们先要定义 Brauer 同态 β_P.

(10.3.4) 定义　设 P 是 G 的 p 子群, $N = N_G(P)$ 和 $C = C_G(P)$ 分别为 P 在 G 里的正规化子和中心化子. 定义 k 线性映射 $\beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N])$ 使得

$$\beta_P(F) = \sum_{x\in\mathcal{F}\bigcap C} x, \tag{4}$$

这里 F 是对应于 $\mathcal{F} \in \mathrm{Cl}(G)$ 的类和. 由于 $\mathcal{F}\bigcap C$ 是 N 的一些共轭类的并, 我们有 $\beta_P(F) \in Z(k[N])$.

(10.3.5)　为了证明定理 (10.3.3), 要用到下面三个事实:

(a) $\beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N])$ 是代数同态 (称 β_P 为 **Brauer 同态**);

(b) 设 $z = \sum_{\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)} a_F F \in Z(k[G]), a_F \in k$. 则 $\beta_P(z) \neq 0$ 当且仅当 P 落在某些满足条件 $a_F \neq 0$ 的共轭类 $\mathcal{F}$ 的亏群 H 里.

(c) 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 和 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$ 满足 $a_B(\mathcal{L}) \neq 0$. 设 $P \in \delta(\mathcal{L}), N = N_G(P)$. 则存在 $b \in \mathrm{Bl}(N)$ 使得

$$\lambda_B = \lambda_b\beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N]) \longrightarrow k.$$

这三个事实的证明留给读者去做 (见习题 5—7, 或参阅 Isaacs [2] 的引理 15.32—15.34).

定理 (10.3.3) 的证明 如果 $a_B(\mathcal{L}) \neq 0$, 令 $P \in \delta(\mathcal{L})$, 则由 (10.3.5) (c) 知: 存在某 $b \in \mathrm{Bl}(N_G(P))$ 使得 $\lambda_B = \lambda_b\beta_P$. 因为 $\mathcal{H}$ 是 B 的亏类, 所以有 $0 \neq \lambda_B(H) = \lambda_b(\beta_P(H))$. 这推出 $\beta_P(H) \neq 0$. 由 (10.3.5) (b) 知: P 落在 $\mathcal{H}$ 的某个亏群里. (a) 得证.

现将 (10.3.5)(c) 用于 $\mathcal{H} \in \mathrm{Cl}(G)$. 因为 $a_B(\mathcal{H}) \neq 0$, 所以存在某 $D \in \delta(\mathcal{H})$ 与某 $b \in \mathrm{Bl}(N_G(D))$ 使得 $\lambda_B = \lambda_b\beta_D$. 设 $\lambda_B(L) \neq 0$. 则 $\beta_D(L) \neq 0$. 故由 (10.3.5)(b) 知: D 落在 $\mathcal{L}$ 的一个亏群里. 这证明了 (b). □

(10.3.6) 定义 令 $B \in \mathrm{Bl}(G)$. 称 B 的亏类的 p 亏群为 B 的**亏群**. 以 $\delta_G(B)$ (或 $\delta(B)$) 记这些亏群的集合.

(10.3.7) 推论 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, $\delta_G(B)$ 是 G 的子群的单一共轭类.

证 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是 B 的二个亏类. 只要证明: $\delta_G(\mathcal{H}_1) = \delta_G(\mathcal{H}_2)$. 令 $D_i \in \delta_G(\mathcal{H}_i), i = 1, 2$. 由定理 (10.3.3) 知: D_1 和 D_2 之中的任何一个包含另一个的共轭. 这证明了本推论. □

或问: 群 G 的哪些 p 子群会成为块的亏群? 可以证明: 块的每个亏群必能表成 G 的某二个 Sylow p 子群的交. 这里要证明一个较弱的结论: 群 G 的极大正规 p 子群落在块的每个亏群里.

(10.3.8) 记 $\mathbf{O}_p(G)$ 为群 G 的极大正规 p 子群, 记 $\mathbf{O}_{p'}(G)$ 为群 G 的极大正规 p' 子群.

(10.3.9) 引理 记 $P = \mathbf{O}_p(G)$. 则对于 G 的每个不可约 k 表示 η, 有包含关系 $P \subseteq \mathrm{Ker}\,\eta$.

证 P 含有唯一的 p' 共轭类 $\{1_G\}$. 由推论 (10.1.6) 知: $\overline{\mathrm{Irr}}_k(P) = \{1_P\}$. 如果 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$, 则由定理 (6.1.1) 知: 限制表示 η_P 完全可约. 于是, η_P 是 P 的一些单位表示的直和, 即 $P \subseteq \mathrm{Ker}\,\eta$. □

(10.3.10) 定理 设 $\mathcal{H} \in \mathrm{Cl}(G)$ 满足条件 $\mathcal{H} \bigcap C_G(\mathbf{O}_p(G)) = \varnothing$. 则 $H = \sum_{x\in\mathcal{H}} x$ 是 $Z(k[G])$ 的幂零元.

证 令 $P = \mathbf{O}_p(G)$ 共轭作用于集合 $\mathcal{H}$ 上. 任取 P 轨道 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H}$. 由条件 $\mathcal{H} \bigcap C_G(P) = \varnothing$ 推出 $|\mathcal{O}| > 1$. 因此 $p \mid |\mathcal{O}|$. 令 $x \in \mathcal{O}$. 如果 $y \in \mathcal{O}$, 则存在某

$u \in P$ 使得 $y = x^u = x[x,u]$, 这里 $x^u := u^{-1}xu$ 和 $[x,u] := x^{-1}u^{-1}xu$. 由 $P \lhd G$ 知: $[x,u] \in P$, 故 $\mathcal{O} \subseteq xP$. 令 $\eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$. 据引理 (10.3.9) 知: $P \subseteq \mathrm{Ker}\,\eta$. 因此 η 在陪集 xP 上取常值 $\eta(x)$. 由关系 $p \mid |\mathcal{O}|$ 得: $\sum_{y\in\mathcal{O}} \eta(y) = |\mathcal{O}|\eta(x) = 0$. 故 $\eta(H) = 0$, $\forall \eta \in \overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$. 这推出 $H \in \mathrm{Rad}.\,k[G]$, 即 H 是幂零元. □

(10.3.11) 推论 *G 的 p 块的每个亏群都包含 $P = \mathbf{O}_p(G)$.*

证 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的亏类 $\mathcal{H}$, 记 $H = \sum_{x\in\mathcal{H}} x$. 则 $\lambda_B(H) \neq 0$. 因此 H 不是幂零元. 由定理 (10.3.10) 知:

$$\mathcal{H} \bigcap C_G(P) \neq \varnothing. \tag{5}$$

由 $P \lhd G$ 知 $C_G(P) \lhd G$. 故由 (5) 式知 $\mathcal{H} \subseteq C_G(P)$. 进而, $P \subseteq C_G(h)$ 和 $P \lhd C_G(h)$, $\forall h \in \mathcal{H}$. 由定理 (1.1.13) 知: 每个 $D \in \delta(\mathcal{H})$ 作为某个 $C_G(h)$ $(h \in \mathcal{H})$ 的 Sylow p子群必包含 P. □

以下结果是 §10.2, 习题 2 的推广.

(10.3.12) 推论 *设 G 是 p 可解群 (见 (1.1.5)), 且 $\mathbf{O}_{p'}(G) = \{1_G\}$. 则 G 有唯一 p 块.*

为了证明该推论, 我们需要一个已知结果:

(10.3.13) 引理 (Hall-Higman) *设 G 是 p 可解群, 且 $\mathbf{O}_{p'}(G) = \{1_G\}$. 则 $C_G(\mathbf{O}_p(G)) \subseteq \mathbf{O}_p(G)$.*

推论 (10.3.12) 的证明 设 $B, B' \in \mathrm{Bl}(G)$. 我们断言: $\lambda_B(e_{B'}) = a_{B'}(\{1_G\})$ (见 (1) 式). 一旦该断言得证, 则由于等式右边与 B 无关, 结论也就被证明了. 我们有 $\lambda_B(e_{B'}) = \sum_{\mathcal{H}\in\mathrm{Cl}(G)} a_{B'}(\mathcal{H})\lambda_B(H)$. 由于 $\lambda_B(1_G) = 1$, 我们只要证明: 如果 $\mathcal{H} \neq \{1_G\}$, 则等式 $a_{B'}(\mathcal{H}) = 0$ 和 $\lambda_B(H) = 0$ 之中至少有一个成立.

令 $P = \mathbf{O}_p(G)$. 设 $\lambda_B(H) \neq 0$. 由定理 (10.3.10) 知: $\mathcal{H} \bigcap C_G(P) \neq \varnothing$. 但据引理 (10.3.13) 知: $\mathcal{H} \subseteq C_G(P) \subseteq P$. 因为 $\mathcal{H} \neq \{1_G\}$, 所以 $\mathcal{H} \subseteq G \setminus G_{p'}$. 由定理 (10.2.14)(c) 知: $a_{B'}(\mathcal{H}) = 0$. □

(10.3.14) 定义 *设 D 是 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的亏群. 记 $|D| = p^d$, 称 d 为 B 的亏数, 记 $d(B) = d$ (据推论 (10.3.7) 知该记号有意义).*

下面要利用关于 $B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $B \bigcap \mathrm{IBr}(G)$ 的知识来计算亏数 $d(B)$.

注意一个事实: 如果 $m, n \in \mathbb{Z}$ 满足条件 $p \nmid n$, 则 $m/n \in R$. 此时, 如果 $p \mid m$, 则 $m/n \in \mathrm{m}$.

(10.3.15) 定理 *设 $|G|_p = p^a$. 令 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, $d(B) = d$. 则 p^{a-d} 是整除所有 $\chi(1_G)$ $(\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B)$ 的最高次 p 幂.*

证 设 $\mathcal{H}$ 是 B 的一个亏类, $g \in \mathcal{H}$. 则 $|\mathcal{H}| = |G|/|C_G(g)|$. 因为 $C_G(g)$ 的 Sylow p子群 D 满足 $|D| = p^d$, 所以 p^{a-d} 是 $|\mathcal{H}|$ 的 p 部分. 令 $\chi \in B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$. 则由 §4.4 ,(1) 式和定理 (4.4.5) 知: $\chi(g)|\mathcal{H}|/\chi(\mathbf{1}_G) \in R$. 由

$$0 \neq \lambda_B(H) = \overline{\omega_\chi}(H) = \overline{\chi(g)|\mathcal{H}|/\chi(\mathbf{1}_G)}$$

得: $\chi(g)|\mathcal{H}|/\chi(\mathbf{1}_G) \notin \mathfrak{m}$. 这与关系 $\chi(g) \in R$ (见 (4.1.1) 的性质 6) 一起推出: $|\mathcal{H}|/\chi(\mathbf{1}_G) \notin \mathfrak{m}$. 于是, $|\mathcal{H}|$ 的 p 部分不能超过 $\chi(\mathbf{1}_G)$ 的 p 部分, 即 $p^{a-d} \mid \chi(\mathbf{1}_G)$.

据定理 (10.2.14) (a) 和 §10.2, (1) 式知: g 在 Osima 幂等元 f_B 展开式中的系数为

$$a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)} \chi(\mathbf{1}_G)\chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in B \bigcap \mathrm{IBr}(G)} \Phi_\phi(\mathbf{1}_G)\phi(g^{-1}).$$

(注意: g 是 p' 元素). 我们有 $0 \neq a_B(\mathcal{H}) = \overline{a_g}$, 故 $a_g \notin \mathfrak{m}$. 由推论 (10.2.11) 知: $p^a \mid \Phi_\phi(\mathbf{1}_G)$. 这推出: $\Phi_\phi(\mathbf{1}_G)/|G| \in R$, $\forall \phi \in \mathrm{IBr}(G)$. 因此存在某 $\phi \in \mathrm{IBr}(G) \bigcap B$ 使得 $\phi(g^{-1}) \notin \mathfrak{m}$.

由引理 (10.2.17) 知: ϕ 是一些 $\hat{\chi}$ ($\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$) 的 $\mathbb{Z}$ 线性组合. 故存在某 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$ 使得 $\chi(g^{-1}) \notin \mathfrak{m}$. 现 $\chi(g^{-1})|\mathcal{H}|/\chi(\mathbf{1}_G) = \alpha \in R$ 和 $\chi(g^{-1}) = \alpha\chi(\mathbf{1}_G)/|\mathcal{H}|$. 因此 $\chi(\mathbf{1}_G)/|\mathcal{H}| \notin \mathfrak{m}$, $\chi(\mathbf{1}_G)$ 的 p 部分不能超过 p^{a-d}, 证毕. □

(10.3.16) 推论 *在定理 (10.3.15) 的设定下, p^{a-d} 是整除所有 $\phi(\mathbf{1}_G), \phi \in \mathrm{IBr}(G) \bigcap B$, 的最高次 p 幂.*

证 我们断言: $E_1 = \{\chi(\mathbf{1}_G) \mid \chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B\}$ 和 $E_2 = \{\phi(\mathbf{1}_G) \mid \phi \in \mathrm{IBr}(G) \bigcap B\}$ 有相同的最大公因子. 这因为: 由定理 (10.1.5) 与块的定义 (10.2.2) 知: $\chi(\mathbf{1}_G) \in E_1$ 是一些 $\phi(\mathbf{1}_G) \in E_2$ 的 $\mathbb{Z}$ 线性组合; 又由引理 (10.2.17) 知: 每个 $\phi(\mathbf{1}_G) \in E_2$ 是一些 $\chi(\mathbf{1}_G) \in E_1$ 的 $\mathbb{Z}$ 线性组合. 这导出断言. 于是, 结论可从定理 (10.3.15) 和该断言得到. □

与推论 (10.3.16) 相关的一个事实是: 对于 $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ (或 $\phi \in \mathrm{Irr}_k(G)$), 数 $\phi(\mathbf{1}_G)$ 不必整除 $|G|$ (与定理 (4.4.6) 的结论相比较, 见习题 4 和 (10.1.2) (a)).

(10.3.17) 定义 *在定理 (10.3.15) 的设定下, 如果 $\chi \in B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$, 则 $\chi(\mathbf{1}_G)$ 的 p 部分总能被写成形状 p^{a-d+h}, 这里 $h \geqslant 0$. 称整数 h 为 χ 的***高度**.

Brauer 曾猜测: 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 所有 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$ 都有零高度当且仅当 B 的亏群是交换群.

该猜想当 G 是 p 可解群时被 D. Gluck 和 T. Wolf 证实; 而当 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的亏群是正规子群时被 Reynolds 证实.

如果 $d(B) = 1$, 且 $\chi \in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$ 有正高度, 则 p^a 整除 $\chi(1_G)$. 故由定理 (4.4.6) 知: $|G|/\chi(1_G) \in \mathbb{Z}$ 和 $p \nmid (|G|/\chi(1_G))$. 再由定理 (10.2.18) 得: $B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G) = \{\chi\}$. 故由定理 (10.3.15) 推出: $d(B) = 0$, 矛盾. 因此当 $d(B) = 1$ 时, B 中所有特征标都有零高度.

习 题

1. 取定 $d \in \mathbb{N}$. 设 $\Gamma = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Cl}(G) \mid \mathcal{F}$ 是某 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的亏类, $d(B) = d\}$. 证明: $|\{B \in \mathrm{Bl}(G) \mid d(B) = d\}| \leqslant |\Gamma|$.

提示 设 $I \subseteq Z(k[G])$ 是由类和集合 $\{F = \sum_{x\in\mathcal{F}} x \mid \mathcal{F} \in \Gamma\}$ 所张成的 k 向量空间. 证明: I 上限制代数同态集合 $\{\lambda_B|_I \mid B \in \mathrm{Bl}(G), d(B) = d\}$ 为 k 线性无关.

2. 设 $N = \mathbf{O}_{p'}(G)$ 是群 G 的极大正规 p' 子群, 设 $n = |\{\mathcal{F} \in \mathrm{Cl}(G) \mid \mathcal{F} \subseteq N\}|$.

(a) 设 $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 属于同一 p 块. 证明: χ_N 和 ψ_N 含有相同的不可约分量.

(b) 证明: $|\mathrm{Bl}(G)| \geqslant n$.

3. 设 P 是群 G 的 Sylow p 子群. 证明: 集合 $\{B \in \mathrm{Bl}(G) \mid P \in \delta_G(B)\}$ 的基数等于 $N_G(P)$ 的落在 $C_G(P)$ 内的 p' 共轭类的个数.

提示: 利用习题 1、2 的结果.

4. 设 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, p 是奇素数. 设 (K, R, k) 是 p 模系统, 其中 $\mathrm{char}.K = 0$, 且 K 关于群 G 充分大.

(a) 证明: G 的 p' 共轭类可由其特征多项式 $\lambda^2 - a$ 确定, 这里 $a \in \mathbb{F}_p$; G 恰有 p 个 p' 共轭类. 因此恰有 p 个单 $k[G]$ 模.

(b) 对于每个 d, $0 \leqslant d < p$, 令 M_d 为由二个变量 X, Y 的 d 次齐次多项式组成的 k 空间. 群 G 作为自同构群作用在多项式环 $k[X, Y]$ 上, 这里对于 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$, 置

$$gX = \alpha X + \beta Y, \qquad gY = \gamma X + \delta Y.$$

证明: $k[X, Y]$ 的子空间 $M_0, M_1, \cdots, M_{p-1}$ 是维数分别等于 $1, 2, \cdots, p$ 的 $k[G]$ 子模.

(c) 令 T 为 G 的由所有对角矩阵组成的子群. 证明:

$$X^d, X^{d-1}Y, \cdots, XY^{d-1}, Y^d$$

张成两两不同构的一维 $k[T]$ 模.

(d) 证明: M_d, $0 \leqslant d < p$, 都是单 $k[G]$ 模.

(e) 通过比较 $\dim_k M_d$ 和 $|G| = p(p^2 - 1)$ 证明: 单 $k[G]$ 模的维数不必整除 $|G|$.

(f) 证明: 不是所有的单 $k[G]$ 模都可提升为 $K[G]$ 模 (见命题 (9.5.6) 及其前面的评述).

5. 设 P 是 G 的 p 子群, $N = N_G(P)$ 和 $C = C_G(P)$. 定义 k 线性映射 $\beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N])$ 使得

$$\beta_P(F) = \sum_{x\in\mathcal{F}\bigcap C} x, \quad \forall \mathcal{F} \in \mathrm{Cl}(G).$$

证明: β_P 是 k 代数同态.

提示 对于 $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$, 令 K, L 为相应类和. 必须证明: $\beta_P(KL) = \beta_P(K)\beta_P(L)$. 固定 $c \in C$, 定义 $A = \{(x,y) \mid x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{L}, xy = c\}$ 和 $A_0 = \{(x,y) \mid x \in \mathcal{K} \bigcap C, y \in \mathcal{L} \bigcap C, xy = c\}$. 只要证明: $|A| \equiv |A_0| \pmod p$. 为此, 考虑 $P \subseteq C_G(c)$ 在集合 A 和 A_0 上的共轭作用.

6. 设 $P \subseteq G$ 和 β_P 如习题 5 所给. 设 $z = \sum_F a_F F \in Z(k[G])$, 和式中 F 取遍 G 的类和, $a_F \in k$. 证明: $\beta_P(z) \neq 0$ 当且仅当 P 落在某些满足条件 $a_F \neq 0$ 的共轭类 $\mathcal{F}$ 的亏群 H 里.

提示 $\beta_P(z) \neq 0 \iff$ 存在满足 $a_F \neq 0$ 的类和 F 使得 $\beta_P(F) \neq 0$. 易见: $\beta_P(F) \neq 0 \iff \mathcal{F} \bigcap C_G(P) \neq \varnothing \iff$ 存在某 $x \in \mathcal{F}$ 使得 $P \subseteq C_G(x) \iff P$ 落在 $C_G(x)$ 的某 Sylow p 子群里.

7. 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 和 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$ 满足等式 $a_B(\mathcal{L}) \neq 0$. 令 $P \in \delta_G(\mathcal{L})$. 记 $N = N_G(P)$. 证明: 存在 $b \in \mathrm{Bl}(N)$ 使得

$$\lambda_B = \lambda_b \beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N]) \longrightarrow k.$$

提示 由习题 5、6 知: β_P 是代数同态, 且 $\beta_P(e_B) \neq 0$. 故 $e = \beta_P(e_B)$ 是 $Z(k[N])$ 里非零幂等元, 它不是幂零元. 因此存在满足 $\lambda_b(e) \neq 0$ 的块 $b \in \mathrm{Bl}(N)$. 令 $\mu = \lambda_b \beta_P$. 由定理 (10.2.20)(f)、μ 是代数同态的事实和关系 $\mu(e_B) \neq 0$ 可推出: $\mu = \lambda_B$.

8. 设 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, $\mathbb{F}_p$ 是含 p 个元素的素域. 设 B 是由 G 中所有上三角矩阵组成的子群.

(a) 证明: $G = B \bigcup BxB$, 其中 $x \notin B$.

(b) 证明: $\theta = \mathrm{Ind}_B^G(1_B)$ 满足 $\theta = 1_G + \zeta$, 其中 $\zeta \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 满足 $\zeta(1_G) = p$ (见 §5.1, 习题 5, 称 ζ 为 **Steinberg 特征标**).

(c) 证明: Steinberg 特征标 ζ 是某射影不可分解 $R[G]$ 模 P 的 K 特征标; P 的模 m 约化 $\overline{P}$ 既是单 $k[G]$ 模, 也是射影 $k[G]$ 模.

第十一章　Brauer 关于诱导块的三个主要定理

Brauer 给出关于诱导块的三个主要定理. 设 P 是 G 的 p 子群. Brauer 的第一主要定理建立群 G 的以 P 为亏群的 p 块集合与子群 $N_G(P)$ 的以 P 为亏群的 p 块集合之间的 1-1 对应 (见定理 (11.1.4)). 熟知群 G 上不可约 K 特征标 χ 在 p' 元 x 上的值可由 G 的不可约 Brauer 特征标的值 $\{\phi(x) \mid \phi \in \mathrm{IBr}(C_G(z))\}$ 和广义分解数 $\{d^x_{\chi\phi} \mid \phi \in \mathrm{IBr}(C_G(z))\}$ 来确定 (见引理 11.2.1). Brauer 的第二主要定理给出广义分解数 $d^x_{\chi\varphi}$ 等于零的一个判则 (见定理 (11.2.3)). Brauer 的第三主要定理涉及群的主块, 其断言: G 的子群 H 的块 b 的诱导块 b^G 等于 G 的主块 B_0 当且仅当 b 是 H 的主块 (见定理 (11.3.2)). Brauer 的这三个主要定理作为群 G 的模表示理论 (特别在块理论) 的基本结果被广泛应用.

§11.1　第一主要定理

(11.1.1) 定义　对于 $H \leqslant G$ 和 k 代数同态 $\lambda : Z(k[H]) \longrightarrow k$, 定义 k 线性同态 $\lambda^G : Z(k[G]) \longrightarrow k$ 如下: 对于 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$, 记 $L = \sum_{x\in\mathcal{L}} x$. 置

$$\lambda^G(L) := \lambda\left(\sum_{x\in\mathcal{L}\bigcap H} x\right).$$

如果 λ^G 是 k 代数同态, 则称 λ^G 为λ **的诱导同态**. 此时, 由定理 (10.2.20) (f) 知: 存在唯一的 $b \in \mathrm{Bl}(H)$ 和 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 使得 $\lambda = \lambda_b$ 和 $\lambda^G = \lambda_B$. 记 $B = b^G$,

称 b^G 有定义, 并称 b^G 为 b 的诱导块.

(11.1.2) 引理 设 $H \leqslant G, b \in \mathrm{Bl}(H)$, 且 b^G 有定义. 则 b 的每个亏群都落在诱导块 b^G 的某个亏群里.

证 令 $\mathcal{F}$ 为 b^G 的亏类, $D \in \delta_H(b)$. 我们有 $0 \neq (\lambda_b)^G(F) = \lambda_b(\sum_{\mathcal{L}} L)$, 这里 $\mathcal{L}$ 取遍落在 $\mathcal{F}$ 内的 H 共轭类, $L = \sum_{x \in \mathcal{L}} x$. 特别, $\mathcal{F} \bigcap H \neq \varnothing$, 且存在 H 共轭类 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F} \bigcap H$ 使得 $\lambda_b(L) \neq 0$. 据定理 (10.3.3), 存在 $P \in \delta_H(\mathcal{L})$ 使得 $D \subseteq P$. 现存在某 $x \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ 使得 P 是 $C_H(x)$ 的 Sylow p 子群. 因此存在 $C_G(x)$ 的 Sylow p 子群 S 满足 $S \supseteq P$. 于是, $D \subseteq S \in \delta_G(\mathcal{F}) = \delta_G(b^G)$. □

Brauer 同态 (见 (10.3.5)(a)) 能被用来给出诱导块有定义的充分条件.

(11.1.3) 引理 设 P 是 G 的 p 子群, 设 $H \leqslant G$ 满足条件 $C_G(P)P \subseteq H \subseteq N_G(P)$. 则 $\forall b \in \mathrm{Bl}(H)$, b^G 有定义. 如果 $b \in \mathrm{Bl}(H)$ 和 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 则 $b^G = B$ 当且仅当 $\lambda_B = \lambda_b \beta_P$, 这里 β_P 是 Brauer 同态 (见 (10.3.5)(a)).

证 由 §10.3, (4) 式可见: 代数同态 $\beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N_G(P)])$ 的像落在 $Z(k[H])$ 里. 设 $\lambda : Z(k[H]) \longrightarrow k$ 是代数同态. 则

$$\mu = \lambda\beta_P : Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[H]) \longrightarrow k$$

是代数同态.

我们断言: $\mu = \lambda^G$. 记 $C = C_G(P)$. 设 $\mathcal{F} \in \mathrm{Cl}(G)$, F 是对应的类和. 写 $\sum_{x \in \mathcal{F} \bigcap H} x = u + v$, 这里 $u = \sum_{x \in \mathcal{F} \bigcap C} x$. 则

$$\lambda^G(F) = \lambda(u+v), \quad \mu(F) = \lambda(\beta_P(F)) = \lambda(u). \tag{1}$$

我们必须证明: $\lambda(v) = 0$. 现 v 是一些形如 $L = \sum_{x \in \mathcal{L}} x$ 的元素之和, 这里 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(H)$ 满足 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{L} \bigcap C = \varnothing$. 由于 $P \lhd H$, 我们有 $P \subseteq \mathbf{O}_p(H)$. 因此 $C_G(\mathbf{O}_p(H)) \subseteq C$. 这推出: $\mathcal{L} \bigcap C_G(\mathbf{O}_p(H)) = \varnothing$. 由定理 (10.3.10) 知: L 是幂零元. 于是, $\lambda(L) = 0$, 因此 $\lambda(v) = 0$. 由 (1) 式知: 等式 $\lambda^G(F) = \lambda(u) = \mu(F)$ 对于 G 的所有类和 F 成立. 故 $\lambda^G = \mu$. 断言得证.

如果 $b \in \mathrm{Bl}(H)$ 和 $\lambda = \lambda_b$, 则 $\lambda_b^G = \lambda_b \beta_P$ 是代数同态. 由定理 (10.2.20) (f) 知: 存在唯一的 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 使得 $\lambda_b^G = \lambda_B$, 即 b^G 有定义, 特别, $b^G = B$. □

现在叙述 Brauer 关于诱导块的第一主要定理.

(11.1.4) 定理 (第一主要定理) 设 D 是 G 的 p 子群, $N = N_G(D)$. 则映射 $\psi : b \mapsto b^G$ 是从集合 $\{b \in \mathrm{Bl}(N) \mid D \in \delta_N(b)\}$ 到 $\{B \in \mathrm{Bl}(G) \mid D \in \delta_G(B)\}$ 的双射.

证明定理 (11.1.4) 需要一个引理.

(11.1.5) 引理 设 P 是 G 的 p 子群. 令 $C=C_G(P)$ 和 $N=N_G(P)$. 则映射 $\phi:\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\bigcap C$ 是从集合 $\{\mathcal{F}\in \mathrm{Cl}(G)\mid P\in\delta_G(\mathcal{F})\}$ 到 $\{\mathcal{D}\in \mathrm{Cl}(N)\mid P\in\delta_N(\mathcal{D})\}$ 的双射.

证 设 $\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)$ 满足 $P\in\delta_G(\mathcal{F})$. 任取 $x,y\in\mathcal{F}\bigcap C$. 则 P 同时是群 $C_G(x)$ 和 $C_G(y)$ 的 Sylow p 子群. 写 $y=x^g, g\in G$. 则 P 和 P^g 都是群 $C_G(y)$ 的 Sylow p 子群. 由定理 (1.1.13) 知: 存在某 $c\in C_G(y)$ 使得 $P=P^{gc}$. 我们有 $gc\in N$ 和 $y=x^{gc}$. 这与事实 $C\lhd N$ 一起推出: $\mathcal{L}=\mathcal{F}\bigcap C$ 形成 N 的单一共轭类. 由事实 $P\in\delta_N(\mathcal{L})$ 可见, $\phi:\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\bigcap C$ 是从集合 $\{\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)\mid P\in\delta_G(\mathcal{F})\}$ 到 $\{\mathcal{D}\in\mathrm{Cl}(N)\mid P\in\delta_N(\mathcal{D})\}$ 的映射. 显然, ϕ 是单射. 设 $\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(N)$ 满足 $P\in\delta_N(\mathcal{L})$, 又设 $\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)$ 包含 $\mathcal{L}$. 由事实 $\mathcal{L}\bigcap C\neq\varnothing$ 和 $C\lhd N$ 推出: $\mathcal{L}\subseteq C$. 设 $x\in\mathcal{L}$ 和 $P\subseteq S$, 其中 S 为 $C_G(x)$ 的 Sylow p 子群. 如果 $S\supset P$, 则由定理 (1.1.13) 知: $P\subset N_S(P)=S\bigcap N\subseteq C_N(x)$. 由于 $S\bigcap N$ 是 p 群, 这与条件 $P\in\delta_N(\mathcal{L})$ 相矛盾. 于是, $P=S\in\delta_G(\mathcal{F})$. 我们有 $\phi(\mathcal{F})=\mathcal{L}$, 即 ϕ 是满射. 证毕. □

定理 (11.1.4) 的证明 记 $\mathcal{B}=\{b\in\mathrm{Bl}(N)\mid D\in\delta_N(b)\}$. 如果 $b\in\mathcal{B}$, 则由引理 (11.1.3) 知: b^G 有定义. 令 $b^G=B\in\mathrm{Bl}(G)$. 因为 $D\in\delta_N(b)$, 所以据引理 (11.1.2) 知: 存在某 $P\in\delta_G(B)$ 使得 $D\subseteq P$.

我们断言: $D=P$. 令 $\mathcal{L}$ 为 b 的亏类, $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)$. 在引理 (11.1.5) 里分别以 $D,\mathcal{L}$ 取代 $P,\mathcal{D}$ 得: $\mathcal{F}\bigcap C=\mathcal{L}$ 和 $D\in\delta_G(\mathcal{F})$, 这里 $C=C_G(D)$. 由引理 (11.1.3) 得:

$$\lambda_B(F)=\lambda_b(\beta_D(F))=\lambda_b(L)\neq 0.$$

据定理 (10.3.3), P 落在 $\mathcal{F}$ 的某个亏群里, 即 D 的某个共轭子群里, 或等价地, 存在某 $g\in G$ 使得 $P^g\subseteq D\subseteq P$. 于是, $D=P\in\delta_G(B)$, 断言得证. 所以块的诱导映射 ψ 将 $\mathcal{B}$ 映到 $\{B\in\mathrm{Bl}(G)\mid D\in\delta_G(B)\}$ 里.

现令 $B\in\mathrm{Bl}(G), D\in\delta_G(B)$ 和 $N=N_G(D)$. 令 $\mathcal{F}$ 为 B 的亏类. 则 $a_B(\mathcal{F})\neq 0$ 和 $D\in\delta_G(\mathcal{F})$. 由 (10.3.5) (c) 知: 存在某 $b\in\mathrm{Bl}(N)$ 使得 $\lambda_B=\lambda_b\beta_D$. 因此由引理 (11.1.3) 得: $b^G=B$. 我们必须证明: $b\in\mathcal{B}$. 令 $P\in\delta_N(b)$. 由于 $D\lhd N$, 由推论 (10.3.11) 知: $D\subseteq \mathbf{O}_p(N)\subseteq P$. 根据引理 (11.1.2), P 落在 B 的某个亏群里. 所以存在某 $g\in G$ 使得 $D\subseteq P\subseteq D^g$. 于是, $D=P\in\delta_N(b)$, 即 $b\in\mathcal{B}$. 这推出 ψ 是满射.

最后, 设 $b_1,b_2\in\mathcal{B}$ 满足条件 $b_1^G=B=b_2^G$. 设 $\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(N)$ 满足 $D\supseteq P\in\delta_N(\mathcal{L})$. 如果 $D\supset P$, 则据定理 (10.3.3) 知: $\lambda_{b_1}(L)=0=\lambda_{b_2}(L)$. 如果 $D=P$, 则由引理 (11.1.2) 知: 存在某 $\mathcal{F}\in\mathrm{Cl}(G)$ 使得 $\mathcal{L}=C\bigcap\mathcal{F}$. 因此 $\lambda_{b_i}(L)=\lambda_{b_i}(\beta_D(F))=\lambda_B(F)$ 对于 $i=1,2$ 都成立. 所以对于亏群落在 D 中

的 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(N)$, λ_{b_1}, λ_{b_2} 在其类和上的取值都相等. 故由定理 (10.3.3) (a) 推出 $\lambda_{b_2}(e_{b_1}) = \lambda_{b_1}(e_{b_1}) = 1$, 即 $b_1 = b_2$. □

习　题

1. 设 $H \leqslant G, b \in \mathrm{Bl}(H)$, 且 b^G 有定义. 试举一例说明: 可能存在 K, $H \leqslant K \leqslant G$, 使得 b^K 无定义.

2. 设 $H \leqslant K \leqslant G$, $b \in \mathrm{Bl}(H)$, 且 b^K 有定义. 证明: b^G 有定义当且仅当 $(b^K)^G$ 有定义. 当等价条件满足时, 等式 $b^G = (b^K)^G$ 成立.

3. 设 P 是 G 的 p 子群, $N_G(P) \leqslant H \leqslant G$. 证明: $b \mapsto b^G$ 给出从集合 $\{b \in \mathrm{Bl}(H) \mid P \in \delta_H(b)\}$ 到 $\{B \in \mathrm{Bl}(G) \mid P \in \delta_G(B)\}$ 的双射.

4. 设 $\sigma: G \longrightarrow G'$ 是群同构, 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 和 $D \in \delta_G(B)$.

(a) 证明: $B^\sigma = \{\chi^\sigma \mid \chi \in B\}$ 是 G' 的 p 块, 且 $D^\sigma \in \delta_{G'}(B^\sigma)$.

(b) 设 $U \leqslant G, b \in \mathrm{Bl}(U)$, 且 b^G 有定义. 证明: $(b^\sigma)^{G'}$ 有定义, 且 $(b^\sigma)^{G'} = (b^G)^\sigma$.

(c) 设 $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ 固定 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$. 证明: $D =_G D^\tau$.

5. 以 $\mathrm{Cl}(G_{p'})$ 记 G 的属于 $G_{p'}$ 的共轭类集合. 设 $B_1, B_2 \in \mathrm{Bl}(G)$ 和 $D \in \delta_G(B_1) \bigcap \delta_G(B_2)$. 证明: $B_1 = B_2$ 当且仅当等式 $\lambda_{B_1}(L) = \lambda_{B_2}(L)$ 对于每个以 D 为亏群的 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G_{p'})$ 都成立.

6. (Tsushima) 设 D 是 G 的正规 p 子群, 设在 $\mathbf{O}_{p'}(G)$ 内存在 m 个两两互异的以 D 为亏群的 G共轭类. 证明: G 里至少存在 m 个以 D 为亏群的块.

7. 设 G 是 p 可解群, 且 $\mathbf{O}_{p'}(G) = 1$. 证明: G 有唯一 p 块.

提示　利用事实: $C_G(\mathbf{O}_p(G)) \subseteq \mathbf{O}_p(G)$.

§11.2 第二主要定理

为了叙述 Brauer 的第二主要定理, 我们要引入广义分解数的概念.

(11.2.1) 引理　*设 $z \in G$ 满足 $o(z) = p^e$. 令 $C = C_G(z)$. 对于 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $\phi \in \mathrm{IBr}(C)$, 存在唯一的 $d^z_{\chi\phi} \in R \bigcap \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p^e})$ 使得*

$$\chi(xz) = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}(C)} d^z_{\chi\phi}\phi(x), \quad \forall \quad x \in C_{p'} \quad (\text{这里 } C_{p'} \text{ 是群 } C \text{ 的 } p' \text{ 元素集合}). \ (1)$$

证　χ 在 C 上的限制函数有形状 $\chi_C = \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}_K(C)} a_\psi \psi$, 其中 $a_\psi \in \mathbb{Z}$. 据推论 (1.4.3), $\forall \psi \in \mathrm{Irr}_K(C)$, 存在某 $\mu_\psi \in \mathrm{Irr}_K(Z(C))$ 使得 $\psi_{Z(C)} = \psi(1)\mu_\psi$, 这里 $Z(C)$ 是群 C 的中心. 因为 $z \in Z(C)$, 所以 $\psi(xz) = \psi(x)\mu_\psi(z)$, $\forall x \in C_{p'}$. 因此

$$\chi(xz) = \sum_{\substack{\psi \in \mathrm{Irr}_K(C) \\ \phi \in \mathrm{IBr}(C)}} a_\psi \mu_\psi(z) d_{\psi\phi}\phi(x) \qquad (\text{见 } (10.1.10)).$$

可取 $d^z_{\chi\phi}=\sum_{\psi\in\mathrm{Irr}_K(C)}a_\psi\mu_\psi(z)d_{\psi\phi}$ (注: 由 $o(z)=p^e$ 知: $\mu_\psi(z)\in R\bigcap\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p^e})$). 唯一性可从 $\mathrm{IBr}(C)$ 的线性无关性得到. □

(11.2.2) 定义 称引理 (11.2.1) 中的代数整数 $d^z_{\psi\phi}$ 为**广义分解数**.

注意 如果 $z=1$, 则 $C=G$ 和 $d^z_{\psi\phi}=d_{\psi\phi}$. 又, $\forall g\in G$, 取 $z=g_p$, $x=g_{p'}$. 可用广义分解数和 Brauer 特征标来表示 $\chi(g)$. 如果 $b\in \mathrm{Bl}(C_G(z))$, 其中 z 是 p 元素, 则由引理 (11.1.3) 知 b^G 有定义.

(11.2.3) 定理 (第二主要定理) *设 $z\in G_p$ (见 (9.1.3)), $C=C_G(z)$. 设 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $\phi\in\mathrm{IBr}(C)$ 满足 $\chi\in B\in\mathrm{Bl}(G),\phi\in b\in\mathrm{Bl}(C)$ 和 $b^G\neq B$. 则 $d^z_{\chi\phi}=0$.*

为了证明定理 (11.2.3), 我们要先做一些准备工作.

(11.2.4) 引理 *设 A 是环, B 是 $Z(A)$ 的子环. 设 A 作为 B 模有限生成, 则 $\mathrm{Rad}.B\subseteq\mathrm{Rad}.A$.*

证 A 是 B 代数. 令 M 为任意单 A 模. 我们只要证: $(\mathrm{Rad}.B)M=0$. 可将 A 写成有限和形式: $A=\sum Ba_i$. 令 $0\neq m\in M$. 则 $M=Am=\sum Ba_im$, 故 M 作为 B 模有限生成. 由引理 (9.1.14) 知: $(\mathrm{Rad}.B)M\subset M$. 因为 $(\mathrm{Rad}.B)M$ 是 M 的 A 子模 (注意: $\mathrm{Rad}.B\subseteq Z(A)$), 所以由 M 的单性假设知: $(\mathrm{Rad}.B)M=0$. □

在以下的证明里要用到一个事实: 当 x 是环 A 的幂零元时, 1_A-x 在 A 里可逆.

(11.2.5) 引理 *设 $f\in R[G]$ 是幂等元 (不必中心幂等), $x\in fR[G]f$ 满足 $\overline{x}=\overline{f}$. 则存在唯一的 $y\in fR[G]f$ 使得 $xy=f=yx$.*

证 记 $A=fR[G]f$. 注意 A 是以 f 为恒等元的环. 只要证明: x 在 A 里可逆. 为此, 只要证明: $f-x\in\mathrm{Rad}.A$. 记 $B=fR$. 则 B 是 $Z(A)$ 的含恒等元 f 的子环. 又, A 作为 B 模有限生成 (这因为有限集 fGf 在 B 上生成了 A). 由引理 (11.2.4) 知: $\mathrm{Rad}.B\subseteq\mathrm{Rad}.A$.

映射 $s\mapsto fs$ 是从环 R 到 B 的满同态, 故 $f\mathrm{Rad}.R\subseteq\mathrm{Rad}.B$. 这推出: $f\mathrm{Rad}.R\subseteq\mathrm{Rad}.A$. 据假设条件知: $f-x\in(\mathrm{Rad}.R)[G]$. 因此可写 $f-x=\sum_{g\in G}u_gg$, 这里 $u_g\in\mathrm{Rad}.R$, $\forall g\in G$. 由 $x\in fR[G]f$ 得:

$f-x=f(f-x)f=\sum_{g\in G}fu_g(fgf)\in f(\mathrm{Rad}.R)(fR[G]f)\subseteq(\mathrm{Rad}.A)A\subseteq\mathrm{Rad}.A$. □

(11.2.6) 引理 *设 $B\in\mathrm{Bl}(G)$ 和 $x\in Z(R[G])$. 如果 $\lambda_B(\overline{x})=1$, 则存在 $y\in f_BZ(R[G])$ 使得 $xy=f_B$.*

证 因为 $\lambda_B(\overline{f_B x}) = \lambda_B(e_B)\lambda_B(\overline{x}) = 1$ 和 $f_B \in Z(R[G])$, 所以用 $f_B x$ 代替 x 不会影响假设条件和引理的结论. 故可设 $x \in f_B Z(R[G])$. 特别, $\overline{x}e_B = \overline{x}$. 对于任何不同的 $B', B \in \mathrm{Bl}(G)$, 有 $\lambda_{B'}(\overline{x}) = \lambda_{B'}(\overline{x}e_B) = 0$. 由假设知: $\lambda_B(e_B - \overline{x}) = 0$. 于是, 对于每个 $B' \in \mathrm{Bl}(G)$, 都有 $\lambda_{B'}(e_B - \overline{x}) = 0$. 因此由推论 (10.2.5) 知 $e_B - \overline{x} \in \mathrm{Rad}.\, Z(k[G])$, 即 $e_B - \overline{x}$ 是幂零元. 这推出 $\overline{x}$ 在以 e_B 为恒等元的环 $e_B Z(k[G])$ 里可逆. 存在 $u \in f_B Z(R[G])$ 满足 $\overline{xu} = e_B$. 因为 $xu \in f_B R[G] f_B$, 由引理 (11.2.5) 知: 存在唯一的 $v \in f_B R[G] f_B$ 使得 $xuv = f_B$. 由于 $xu \in Z(R[G])$, 元素 v 是 xu 的逆元, 且属于 $Z(R[G])$. 于是 $y = uv$ 为所求. □

对于 $x = \sum_{g\in G} a_g g \in R[G], a_g \in R$, 定义 $\mathrm{supp}(x) = \{g \in G \mid a_g \neq 0\}$.

(11.2.7) 引理 *设 $H \leqslant G$ 和 $b \in \mathrm{Bl}(H)$ 满足 $b^G = B \in \mathrm{Bl}(G)$. 则存在 $w \in R[G]$ 使得*

(a) $(1 - f_B)f_b = (1 - f_B)w$.

(b) $wf_b = w$.

(c) $hw = wh, \forall h \in H$.

(d) $\mathrm{supp}(w) \subseteq G \setminus H$.

证 写 $f_B = a - c$, 其中 $a, c \in R[G]$ 满足 $\mathrm{supp}(a) \subseteq H$ 和 $\mathrm{supp}(c) \subseteq G \setminus H$. 由 $f_B \in Z(R[G])$ 容易推出: $a \in Z(R[H])$, 且 H 里的元素都与 c 相交换. 由假设条件 $b^G = B$ 知: $\lambda_b^G = \lambda_B$. 因此 $1 = \lambda_B(e_B) = \lambda_b(\overline{a})$. 由引理 (11.2.6), 存在 $y \in f_b Z(R[H])$ 使得 $ay = f_b$.

取 $w = cy$. 则 w 显然满足条件 (b), (c) 和 (d). 我们有 $f_B y = (a - c)y = f_b - w$. 于是, $(1 - f_B)(f_b - w) = (1 - f_B)f_B y = 0$. 这推出 (a). □

(11.2.8) 定理 *设 $H \leqslant G$ 和 $b \in \mathrm{Bl}(H)$ 满足 $b^G = B \in \mathrm{Bl}(G)$. 设 $h \in H$ 和 $C_G(h_p) \subseteq H$, 这里 h_p 是 h 的 p 部分. 如果 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus B$, 则 $\chi(hf_b) = 0$.*

下面的证明由 Isaacs 给出.

证 设 M 是以 χ 为特征标的 $K[G]$ 模, 令 $V = f_b M$. 由 $f_b \in Z(R[H])$ 知: V 是 M 的子 $K[H]$ 模. 显然, M 是子空间 V 和 $W = (1 - f_b)M$ 的直和. 因为 hf_b 像 h 一样作用于 V, 并零化 W, 所以 $\chi(hf_b)$ 等于 h 在 V 上作用的特征值的和 (重数计在内). 不妨设 $V \neq 0$ (如否, 则有 $hf_b M = 0$, 结论显然).

令 ω 为 K 中 p 次本原单位根. 我们要证: 如果 $\alpha \in K$, 则 α 和 $\omega\alpha$ 作为 h 在 V 上作用的特征值有相同的重数. 一旦这个结论得证, 则对于 h 在 V 上作用的特征值 α, 数 $\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha, \ldots, \omega^{p-1}\alpha$ 都是 h 在 V 上作用的具有相同重数的特征值. 由于这些数的和等于零, 定理的结论得证.

记 V_α 为 h 的以 α 为特征值的特征子空间, 相应的特征值重数为 $\dim V_\alpha$. 设 w 如引理 (11.2.7) 所给. 下面要找出 $w_1, w_2, \cdots, w_p \in f_bR[G]f_b$ 使得 $w = \sum_{i=1}^p w_i$ 和 $w_i^h = w_{i+1}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant p$, 这里的下标 i 取自模 p 剩余类域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 而 $w_i^h := h^{-1}w_ih$.

因为 H 的元素都与 w 相交换, 所以 H 共轭作用于 supp(w) 里的元素. 又, 在 w 的展开式里, x 的系数等于 x^z 的系数, $\forall x \in \text{supp}(w), z \in H$. 由于 $\text{supp}(w) \subseteq G \setminus H$ 和 $C_G(h_p) \subseteq H$, 我们断言: 循环群 $\langle h\rangle$ 在 supp(w) 上共轭作用的每个轨道里所含元素的个数都能被 p 整除. 这因为: 如否, 则必存在某 $x \in G \setminus H$ 使得 $[\langle h\rangle : C_{\langle h\rangle}(x)]$ 不被 p 整除. 此时, $\langle h_p\rangle \subseteq C_G(x)$, 因此 $x \in C_G(h_p)$. 这与假设条件 $C_G(h_p) \subseteq H$ 矛盾. 断言得证. 于是, $\forall x \in \text{supp}(w)$, 有 $p \mid [\langle h\rangle : C_{\langle h\rangle}(x)]$. 这推出 $C_{\langle h\rangle}(x) \subseteq \langle h^p\rangle$. 如果

$$\{C_{\langle h\rangle}(x)y_j\}_{j=1,\cdots,t}$$

是 $\langle h^p\rangle$ 关于 $C_{\langle h\rangle}(x)$ 的右陪集集合, 则

$$\{C_{\langle h\rangle}(x)y_jh^i\}_{\substack{j=1,\cdots,t\\ i=1,\cdots,p}}$$

是 $\langle h\rangle$ 关于 $C_{\langle h\rangle}(x)$ 的右陪集集合. 现设 $\mathcal{O}$ 是 $x \in \text{supp}(w)$ 所在的 $\langle h\rangle$ 轨道. 作分解

$$\mathcal{O} = \Delta_{\mathcal{O}}^{h} \dot\bigcup \Delta_{\mathcal{O}}^{h^2} \dot\bigcup \cdots \dot\bigcup \Delta_{\mathcal{O}}^{h^p},$$

这里 $\Delta_{\mathcal{O}} = \{x^{y_1}, \cdots, x^{y_t}\}$. 进而, 由 $h^p \in \langle h^p\rangle$ 知:

$$\langle h^p\rangle = \bigcup_{j=1}^{t} C_{\langle h\rangle}(x)y_j = \bigcup_{j=1}^{t} C_{\langle h\rangle}(x)y_jh^p.$$

这推出 $\Delta_{\mathcal{O}}^{h^p} = \Delta_{\mathcal{O}}$. 令 $w_1, w_2, \cdots, w_p \in R[G]$ 使得 $w = \sum_{i=1}^p w_i$, 其中 $\text{supp}(w_i) = \bigcup_{\mathcal{O}} \Delta_{\mathcal{O}}^{h^i}$, $\mathcal{O}$ 取遍 supp(w) 的 $\langle h\rangle$ 轨道. 则 $w_i^h = w_{i+1}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant p$, 这里下标取自 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 由引理 (11.2.7) (b), (c) 得: $w = f_bwf_b$. 同时, $f_b^h = f_b$. 因此能以 $f_bw_if_b$ 来替代 w_i, 这样就取到了所要求的元素 $w_i \in f_bR[G]f_b$.

由 $w_i \in f_bR[G]f_b$ 得 $w_iV \subseteq V$. 现定义

$$s = \sum_{i=1}^{p} \omega^i w_i \in R[G].$$

则 $sV \subseteq V$. 又,

$$s^h = \sum_{i=1}^{p} \omega^i w_{i+1} = \omega^{-1} \sum_{i=1}^{p} \omega^{i+1} w_{i+1} = \omega^{-1} s.$$

对于 $u \in V_\alpha$, 有

$$h(su) = s^{h^{-1}}hu = \alpha\omega(su).$$

以 s 左乘将 V_α 映到 h 的特征子空间 $V_{\omega\alpha}$. 我们要证明: V 上映射 $v \mapsto sv$ 是单的. 如是, 则

$$\dim_K V_\alpha = \dim_K sV_\alpha \leqslant \dim_K V_{\omega\alpha}.$$

通过在 h 的特征值 $\omega^i\alpha$ 上重复上述论证得:

$$\dim_K V_\alpha \leqslant \dim_K V_{\omega\alpha} \leqslant \dim_K V_{\omega^2\alpha} \leqslant \cdots \leqslant \dim_K V_{\omega^p\alpha} = \dim_K V_\alpha,$$

这完成了定理的证明.

余下要证明: 以 s 左乘给出 V 上单射. 由于域 k 上没有 p 幂阶的非平凡元素, 我们有 $\overline{\omega} = 1$, 因此 $\overline{s} = \overline{w}$. 由引理 (11.2.7)(a) 得:

$$\overline{(1-f_B)f_b} = \overline{(1-f_B)w} = \overline{(1-f_B)}\overline{w} = \overline{(1-f_B)}\overline{s} = \overline{(1-f_B)s}.$$

记 $f := (1-f_B)f_b$. 首先证明: $fv = v$, $\forall v \in V$. 因为 $V = f_bM$, 所以 $f_bv = v$. 又, 由于 χ 不属于 B, 由定理 (10.2.20)(e) 知: $f_BM = 0$. 因此 $(1-f_B)v = v$, $\forall v \in V$. 这推出 $fv = v$, $\forall v \in V$.

由 $V \neq 0$ 可知 $f \neq 0$. 因为 f_b 和 $1-f_B$ 互相交换, 且两者都是幂等元, 所以 f 也是幂等元, 且 $\overline{f} = \overline{(1-f_B)s}$.

其次证明: $(1-f_B)s \in fR[G]f$. 由于 $s = \sum_{i=1}^{p}\omega^i w_i$ 和 $f_bw_if_b = w_i$, 我们有 $f_bsf_b = s$. 现 $1-f_B \in Z(R[G])$, 这推出

$$f(1-f_B)sf = (1-f_B)f_b(1-f_B)s(1-f_B)f_b = (1-f_B)f_bsf_b = (1-f_B)s,$$

即 $(1-f_B)s \in fR[G]f$.

由引理 (11.2.5) 知: 存在满足条件 $(1-f_B)sy = f$ 的元素 $y \in fR[G]f$. 由 $1-f_B \in Z(R[G])$ 和 f 是 $fR[G]f$ 的恒等元的事实推出 $ys(1-f_B) = f$. 如果 $v \in V$, 则由 $v = (1-f_B)v$ 和 $fv = v$ 推出

$$ysv = ys(1-f_B)v = fv = v.$$

如果 $sv = 0$, 则 $v = 0$. 这证明了: s 的左乘是 V 上的单射. □

定理 (11.2.3) 的证明 设 $x \in G_p, H = C_G(x)$, $b \in \mathrm{Bl}(H)$. 由引理 (11.1.3) 知: b^G 有定义, 记 $b^G = B$. 设 $\varphi \in \mathrm{IBr}(H) \bigcap b$ 和 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus B$. 我们要证明: $d^x_{\chi\varphi} = 0$.

设 $\psi \in \mathrm{Irr}_K(H)$ 和 $z \in H$. 由 §10.2, 习题 10 的结论知:

$$\psi(zf_b) = \begin{cases} \psi(z), & \text{如果 } \psi \in b, \\ 0, & \text{如果 } \psi \notin b. \end{cases}$$

由定理 (11.2.8) 知: 对于 p' 元素 $y \in H$, 有

$$\begin{aligned}
0 = \chi(yxf_b) &= \sum_{\psi\in \mathrm{Irr}_K(H)} (\chi_H, \psi)\psi(yxf_b) = \sum_{\psi\in \mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b} (\chi_H, \psi)\psi(yx) \\
&= \sum_{\psi\in \mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b} \frac{(\chi_H,\psi)\psi(x)}{\psi(1)}\psi(y) \\
&= \sum_{\psi\in \mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b}\ \sum_{\varphi\in \mathrm{IBr}(H)\bigcap b} d_{\psi\varphi}\frac{(\chi_H,\psi)\psi(x)}{\psi(1)}\varphi(y) \\
&= \sum_{\varphi\in \mathrm{IBr}(H)\bigcap b}\left(\sum_{\psi\in \mathrm{Irr}_K(H)\cap b} d_{\psi\varphi}\frac{(\chi_H,\psi)\psi(x)}{\psi(1)}\right)\varphi(y) = \sum_{\varphi\in \mathrm{IBr}(H)\bigcap b} d^x_{\chi\varphi}\varphi(y).
\end{aligned}$$

于是, 我们的结论可由 $\mathrm{IBr}(H)$ 里元素的线性无关性 (见定理 (10.1.5)) 推得. □

定理 (11.2.3) 很有用. 下面是几个推论.

(11.2.9) 推论 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $g \in G$. 设 g_p 不落在含 χ 的 p 块的任何亏群里. 则 $\chi(g) = 0$.

证 令 $z = g_p$. 记 $g = zx$, 这里 $x \in C := C_G(z)$ 是 g 的 p' 部分 (见 §1.1). 则由引理 (11.2.1) 知:

$$\chi(g) = \sum_{\phi\in \mathrm{IBr}(C)} d^z_{\chi\phi}\phi(x). \tag{2}$$

我们断言: $d^z_{\chi\phi} = 0$, $\forall \phi \in \mathrm{IBr}(C)$. 这因为: 如否, 则存在某 $\phi \in \mathrm{IBr}(C)$ 使得 $d^z_{\chi\phi} \neq 0$. 设 $\phi \in b \in \mathrm{Bl}(C)$. 据定理 (11.2.3) 知: $\chi \in b^G$. 令 $Q \in \delta_C(b)$. 则由推论 (10.3.11) 知: $z \in \mathbf{O}_p(C) \subseteq Q$. 又, 由引理 (11.1.2) 推出: 存在 $P \in \delta_G(b^G)$ 使得 $Q \subseteq P$. 于是, $z \in P$, 与题设条件矛盾. 断言得证. 将断言用于 (2) 式立得: $\chi(g) = 0$. □

设 $\theta \in \mathrm{cf}_K(G)$ 和 $B \in \mathrm{Bl}(G)$. 记 $\theta_B = \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B}(\theta,\chi)\chi$. 则 $\theta = \sum_{B\in \mathrm{Bl}(G)}\theta_B$.

(11.2.10) 定理 设 $\theta \in \mathrm{cf}_K(G)$, $z \in G_p$. 记 $C = C_G(z)$. 设 $\theta(zx) = 0$, $\forall x \in C_{p'}$. 则 $\theta_B(zx) = 0$, $\forall x \in C_{p'}$ 和 $B \in \mathrm{Bl}(G)$.

证 由 (1) 式得:

$$0 = \theta(zx) = \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)} (\theta,\chi)\chi(zx) = \sum_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)\\ \phi\in \mathrm{IBr}(C)}} (\theta,\chi)d^z_{\chi\phi}\phi(x), \quad \forall\, x \in C_{p'}. \tag{3}$$

由 $\mathrm{IBr}(C)$ 的线性无关性 (见定理 (10.1.5)) 推出

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)}(\theta,\chi)d^z_{\chi\phi}=0,\quad \forall\,\phi\in\mathrm{IBr}(C). \tag{4}$$

如果 $\phi\in\mathrm{IBr}(C)\bigcap b$, 其中 $b\in\mathrm{Bl}(C)$, 则由定理 (11.2.3) 知: $d^z_{\chi\phi}=0$, $\forall\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\setminus b^G$. 因此由 (4) 式得

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap b^G}(\theta,\chi)d^z_{\chi\phi}=0,\quad \forall\,\phi\in\mathrm{IBr}(C)\bigcap b. \tag{5}$$

取定 $B\in\mathrm{Bl}(G)$. 记

$$\mathcal{A}=\bigcup_{\substack{b\in\mathrm{Bl}(C)\\ b^G=B}} b\bigcap\mathrm{IBr}(C).$$

则 $\sum_{\chi\in B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)}(\theta,\chi)d^z_{\chi\phi}=0$, $\forall\phi\in\mathcal{A}$. 于是, 由 (1) 式得:

$$\theta_B(zx)=\sum_{\substack{\chi\in B\bigcap\mathrm{Irr}_K(G)\\ \phi\in\mathcal{A}}}(\theta,\chi)d^z_{\chi\phi}\phi(x)=0,\qquad \forall\,x\in C_{p'}.$$ □

(11.2.11) 推论 (块正交性) 设 $g,h\in G$ 满足 $g_p\not\sim_G h_p$ (即 g_p 与 h_p 在群 G 里不共轭). 则

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B}\chi(g)\chi(h^{-1})=0,\quad \forall\,B\in\mathrm{Bl}(G). \tag{6}$$

证 记 $\theta=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)}\chi(h^{-1})\chi$ 和 $z=g_p$. 如果 $x\in C_G(z)$ 是 p' 元, 则 $z=(zx)_p\not\sim_G h_p$. 因此 $zx\not\sim_G h$. 由定理 (4.2.5) (即特征标的第二正交性关系) 知: $\theta(zx)=0$. 取 $x=g_{p'}$. 则由定理 (11.2.10) 得:

$$0=\theta_B(g)=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B}\chi(g)\chi(h^{-1}),\quad \forall\,B\in\mathrm{Bl}(G).$$ □

习 题

1. 设 $H\leqslant G$, $B\in\mathrm{Bl}(G)$ 和 $b\in\mathrm{Bl}(H)$, 且 b^G 有定义. 证明: 如果 $b^G=B$, 则 $e_be_B\neq 0$.

2. 设 P 是 G 的 p 子群, $B\in\mathrm{Bl}(G)$ 和 $P\in\delta_G(B)$. 设对应于 $\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(G)$ 的类和 L 满足 $\lambda_B(L)\neq 0$. 证明: 存在 $g\in\mathcal{L}\bigcap C_G(P)$ 使得 $g_p\in Z(P)$.

提示 由定理 (11.1.4) 知存在 $b\in\mathrm{Bl}(N_G(P))$ 使得 $P\in\delta_{N_G(P)}(b)$ 和 $b^G=B$. 由引理 (11.1.3) 知: $\lambda_B=\lambda_b\beta_P$. 在 $\mathcal{L}\bigcap C_G(P)$ 里存在 $\mathcal{H}\in\mathrm{Cl}(N_G(P))$ 使得对应的类和 H 满足 $\lambda_b(H)\neq 0$. 取 $g\in\mathcal{H}$. 利用推论 (11.2.9) 可证 $g_p\in Z(P)$.

3. (Knörr)设 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, 设等式 $\chi(g)=0$ 对于任何 p 阶元 $g \in G$ 都成立. 证明: $\chi(1_G)_p = |G|_p$.

提示 设 $\chi \in B \in \mathrm{Bl}(G)$ 和 $P \in \delta_G(B)$. 只要证明: $P=\{1_G\}$. 为此, 只要证明: $H=\{x \in Z(P) \mid x^p = 1_G\}$ 是平凡群. 由定理 (11.1.4) 知存在 $b \in \mathrm{Bl}(N_G(P))$ 使得 $b^G = B$ 和 $P \in \delta_{N_G(P)}(b)$. 利用习题 2 的结果来证明: $1=\lambda_b\left(\sum_{x\in H} x\right)^2 = |\overline{H}|$.

4. 设 $H \leqslant G$, $b \in \mathrm{Bl}(H)$ 使得 $b^G = B \in \mathrm{Bl}(G)$ 有定义. 令 $D \in \delta_H(b)$ 和 $P \in \delta_G(B)$. 证明: 如果 $x \in Z(P)$, 则 x 在 G 里共轭于 $Z(D)$ 的某个元素.

提示 应用习题 2.

5. 设 $H \leqslant G$, $b \in \mathrm{Bl}(H)$, 且 b^G 有定义. 证明: b 有亏数零当且仅当 b^G 有亏数零.

提示 应用引理 (11.1.2) 和习题 4.

6. 对于 $z \in G_p$, 定义 z 的 p **截面**为 $S(z)=\{u \in G \mid u_p \sim_G z\}$.

(a) 设 $\{y_1,\ldots,y_l\}$ 是 $C_G(z)$ 里 p' 共轭类的一个代表元系. 证明: $\{zy_1,\ldots,zy_l\}$ 是 G 在 $S(z)$ 里共轭类的一个代表元系.

(b) 设 $\theta \in \mathrm{cf}_K(G)$ 满足: $\theta(x)=0$, $\forall x \in S(z)$. 证明: $\theta_B(x)=0$, $\forall B \in \mathrm{Bl}(G), x \in S(z)$.

7. 对于 $z \in G_p$ 和 $b \in \mathrm{Bl}(C_G(z))$, 称 (z,b) 为**与块 b^G 相关联的子截面**. 对于 $\chi \in \mathrm{cf}_K(G)$, 定义 G 上函数 $\chi^{(z,b)}$ 如下: $\chi^{(z,b)}(x)=0$, $\forall x \in G \setminus S(z)$. 设 $g \in S(z)$. 则存在某 $u \in G$ 和 p' 元素 $y \in C_G(z)$ 使得 $g^u = zy$. 定义 $\chi^{(z,b)}(g)=\chi(zyf_b)$.

(a) 证明: $\chi^{(z,b)}$ 是 G 上类函数.

(b) 对于 $g \in G$ 和 G 的子截面 (z,b), 定义 $(z,b)^g=(z^g,b^g)$, 这里 $b^g=\{\chi^g \mid \chi \in b\}$ 是 $\mathrm{Bl}(C_G(z)^g)$ 里对应于 b 的块. 证明: $\chi^{(z,b)}=\chi^{(z^g,b^g)}$.

(c) 设 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, (z,b) 是与 B 相关联的的子截面, $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)\setminus B$. 证明: $\chi^{(z,b)}=0$.

8. 设 $\chi,\psi \in \mathrm{Irr}_K(G)$. 证明:

(a) 如果 $S(x_1) \neq S(x_2)$, 则 $\left(\chi^{(x_1,b_1)},\psi^{(x_2,b_2)}\right)=0$.

(b) 如果 $\mathcal{S}$ 是 G 的子截面的共轭类的代表系, 则 $\chi=\sum_{(z,b)\in\mathcal{S}}\chi^{(z,b)}$.

(c) 如果 $b,e \in \mathrm{Bl}(C_G(z))$ 和 $b \neq e$, 则 $\left(\chi^{(z,b)},\psi^{(z,e)}\right)=0$.

(d) $\left(\chi^{(z,b)},\psi^{(z,b)}\right) = \sum_{\varphi,\mu\in\mathrm{IBr}(b)} d^z_{\chi\varphi}\overline{d}^z_{\psi\mu}\gamma_{\varphi\mu}$, 这里 $\mathrm{IBr}(b) := \mathrm{IBr}(C_G(z))\bigcap b$, $(\gamma_{\varphi\mu})_{\varphi,\mu\in\mathrm{IBr}(b)}$ 是 Cartan 矩阵 $\mathbf{C}$ 里对应于 b 的子矩阵 $\mathbf{C}_b$ 的逆矩阵 $\mathbf{C}_b^{-1}$, $\overline{a}$ 是 a 的复共轭.

§11.3 第三主要定理

(11.3.1) 定义 称含单位特征标 1_G 的 p 块为 G 的**主块**, 记作 $B_0(G)$. 显然, G 的 Sylow p 子群是 $B_0(G)$ 的亏群.

(11.3.2) 定理 (第三主要定理) 设 $H \leqslant G, b \in \mathrm{Bl}(H), D \in \delta_H(b)$. 设 $H \supseteq DC_G(D)$. 则 b^G 有定义, 且

$$b^G = B_0(G) \iff b = B_0(H). \tag{1}$$

为了证明定理 (11.3.2), 要先做一些准备工作.

对于 $H \leqslant G$, 环 A 和 A 线性映射 $\lambda : Z(A[H]) \longrightarrow A$, 定义 A 线性映射 $\lambda^G : Z(A[G]) \longrightarrow A$ 使得

$$\lambda^G(L) = \lambda\left(\sum_{x\in\mathcal{L}\bigcap H} x\right), \quad \forall\, \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G), \tag{2}$$

这里规定 $\lambda^G(L) = 0$, 如果 $\mathcal{L}\bigcap H = \varnothing$.

回忆在 §4.4, 我们曾对于 $\chi \in \mathrm{ch}_K(G)$ 定义代数同态 $\omega_\chi : Z(K[G]) \longrightarrow K$ 使得

$$\omega_\chi(L) = \frac{|\mathcal{L}|\chi(x_{\mathcal{L}})}{\chi(\mathbf{1})},$$

这里 $x_{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$ 中任意取定的元素. 以下关系成立:

$$\chi(\mathbf{1})\omega_\chi = \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}_K(G)} (\chi,\psi)\psi(\mathbf{1})\omega_\psi.$$

(11.3.3) 引理 设 $H \leqslant G$ 和 $\xi \in \mathrm{ch}_K(H)$. 则

$$(\omega_\xi)^G = \omega_{\xi^G}.$$

证 由于

$$\xi^G(\mathbf{1})\omega_{\xi^G} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} (\xi^G,\chi)\chi(\mathbf{1})\omega_\chi,$$

只要证明:

$$\xi^G(\mathbf{1})(\omega_\xi)^G = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)} (\xi^G,\chi)\chi(\mathbf{1})\omega_\chi.$$

令 $\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$, $x_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$. 如果 $\mathcal{L}\bigcap H \neq \varnothing$, 则写

$$\mathcal{L}\bigcap H = \mathcal{L}_1\bigcup\cdots\bigcup\mathcal{L}_m,$$

这里 $\mathcal{L}_i = \mathrm{Cl}_H(x_i)$ 是含 x_i 的 H 共轭类. 由通常的诱导特征标公式得:

$$\xi^G(x_{\mathcal{L}}) = |C_G(x_{\mathcal{L}})|\sum_{i=1}^{m}\frac{\xi(x_i)}{|C_H(x_i)|}, \qquad (\text{见 §5.2, 习题 6})$$

这里当 $\mathcal{L}\bigcap H=\varnothing$ 时规定 $\xi^G(x_{\mathcal{L}})=0$. 我们有

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)}(\xi^G,\chi)\chi(1_G)\omega_\chi(L)=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)}(\xi^G,\chi)\chi(1_G)\frac{|\mathcal{L}|\chi(x_{\mathcal{L}})}{\chi(1_G)}$$

$$=|\mathcal{L}|\xi^G(x_{\mathcal{L}})=\frac{|G|}{|C_G(x_{\mathcal{L}})|}\left(|C_G(x_{\mathcal{L}})|\sum_{i=1}^{m}\frac{\xi(x_i)}{|C_H(x_i)|}\right)$$

$$=\frac{|G|}{|H|}\sum_{i=1}^{m}|\mathcal{L}_i|\xi(x_i)=\xi^G(1_G)\sum_{i=1}^{m}\omega_\xi(L_i)\qquad\left(\text{注意}:\frac{|G|}{|H|}=\frac{\xi^G(1_G)}{\xi(1_G)}.\right)$$

$$=\xi^G(1_G)\omega_\xi\left(\sum_{x\in\mathcal{L}\bigcap H}x\right)=\xi^G(1_G)(\omega_\xi)^G(L),$$

引理得证. □

设 $H\leqslant G$ 和 $b\in\mathrm{Bl}(H)$. $\forall\xi\in\mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b$ 和 $\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(G)$, 由引理 (11.3.3) 得:

$$\lambda_b^G(L)=\lambda_b\left(\sum_{x\in\mathcal{L}\bigcap H}x\right)=\overline{\omega_\xi\left(\sum_{x\in\mathcal{L}\bigcap H}x\right)}=\overline{(\omega_\xi)^G(L)}=\overline{\omega_{\xi^G}(L)}.$$

进而, 当 $z\in Z(R[G])$ 时, 有

$$\lambda_b^G(\overline{z})=\overline{\omega_{\xi^G}(z)}.\tag{3}$$

下面将经常引用该事实.

引理 (11.3.3) 有个很有意义的推论.

(11.3.4) 推论 设 $H\leqslant G$, $b\in\mathrm{Bl}(H)$ 和 $\xi\in\mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b$. 如果 $\xi^G\in\mathrm{Irr}_K(G)$, 则 b^G 有定义且包含 ξ^G.

证 设 $\xi^G\in B\in\mathrm{Bl}(G)$. 由 (3) 式得:

$$\lambda_b^G(L)=\overline{\omega_{\xi^G}(L)}=\lambda_B(L),\quad\forall\,\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(G).$$

由于 λ_B 是代数同态, 结论得证. □

(11.3.5) 引理 设 $H\leqslant G$ 和 $b\in\mathrm{Bl}(H)$. 令 $\xi\in\mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b$ 和 $B\in\mathrm{Bl}(G)$. 我们有

(a) 如果 $\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(G)$, 则

$$\frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(1_G)}\in R\qquad(\text{见定理 (11.2.10) 前的记号}).$$

(b) 如果 b^G 有定义, $b^G=B\in\mathrm{Bl}(G)$ 和 $\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$, 则

$$\overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(1_G)}\right)}=\overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|\chi(x_{\mathcal{L}})}{\chi(1_G)}\right)},\quad\forall\,\mathcal{L}\in\mathrm{Cl}(G).$$

(c) 如果 b^G 有定义且 $b^G \neq B \in \mathrm{Bl}(G)$, 则

$$\overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(\mathbf{1}_G)}\right)} = 0, \quad \forall\, \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G).$$

证 对于 (a), 我们将证明更一般的结论: 如果 $\chi \in \mathrm{ch}_K(G)$ 满足: $\omega_\chi(L) \in R$, $\forall \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$, 则

$$\frac{|\mathcal{L}|\chi_B(x_{\mathcal{L}})}{\chi(\mathbf{1}_G)} \in R, \quad \forall\, \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G). \tag{4}$$

一旦该结论被证明, 置 $\chi = \xi^G$, 则 (a) 可从引理 (11.3.3) 推出.

写 $f_B = \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B} e_\psi \in Z(R[G])$. 我们有

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{1}_G)\omega_\chi(f_B L) &= \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}_K(G)} (\chi,\psi)\psi(\mathbf{1}_G)\omega_\psi(f_B L)\\ &= \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}_K(G)} (\chi,\psi)\psi(\mathbf{1}_G)\omega_\psi(f_B)\omega_\psi(L)\\ &= \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B} (\chi,\psi)|\mathcal{L}|\psi(x_{\mathcal{L}}) = |\mathcal{L}|\chi_B(x_{\mathcal{L}}).\end{aligned}$$

于是,

$$\omega_\chi(f_B L) = \frac{|\mathcal{L}|\chi_B(x_{\mathcal{L}})}{\chi(\mathbf{1}_G)}. \tag{5}$$

因为 $\omega_\chi(L') \in R$ 和 $f_B L \in Z(R[G])$, $\forall \mathcal{L}', \mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(G)$, 所以 $\omega_\chi(f_B L) \in R$. 故由 (5) 式推出 (4) 式.

现设 $\xi \in \mathrm{Irr}_K(H) \bigcap b$, 且 b^G 有定义. 由 (5) 式得:

$$\omega_{\xi^G}(f_B L) = \frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(\mathbf{1}_G)}.$$

于是, 由引理 (11.3.3) 得:

$$\lambda_{b^G}(e_B L) = \overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(\mathbf{1}_G)}\right)}.$$

因此, 如果 $B \neq b^G$, 则有

$$0 = \lambda_{b^G}(e_B)\lambda_{b^G}(L) = \lambda_{b^G}(e_B L) = \overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(\mathbf{1}_G)}\right)}.$$

如果 $b^G = B$ 和 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$, 则

$$\overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|\chi(x_{\mathcal{L}})}{\chi(\mathbf{1}_G)}\right)} = \lambda_B(L) = \lambda_{b^G}(e_B L) = \overline{\left(\frac{|\mathcal{L}|(\xi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\xi^G(\mathbf{1}_G)}\right)}. \qquad \square$$

回忆在 (1.2.11) 里定义了关于素数 p 的赋值函数 $\nu_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \infty$. 下面是一个很有用的推论:

(11.3.6) 推论 设 $H \leqslant G$ 和 $b \in \mathrm{Bl}(H)$. 设 b^G 有定义. 令 $\xi \in \mathrm{Irr}_K(H) \bigcap b$. 则

(a) 当 $B \neq b^G$ 时有 $\nu_p((\xi^G)_B(1_G)) > \nu_p(\xi^G(1_G))$; 当 $B = b^G$ 时有 $\nu_p((\xi^G)_B(1_G)) = \nu_p(\xi^G(1_G))$.

(b) 存在某 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(H) \bigcap b^G$ 使得 $(\xi^G, \chi) > 0$.

证 取 $x_{\mathcal{L}} = 1_G$. 由引理 (11.3.5)(a) 知:

$$\frac{(\xi^G)_B(1_G)}{\xi^G(1_G)} \in \mathbb{Q} \bigcap R.$$

再由引理 (11.3.5)(b),(c) 知: 当 $b^G = B$ 时, 有

$$\overline{\left(\frac{(\xi^G)_B(1_G)}{\xi^G(1_G)}\right)} = 1;$$

当 $b^G \neq B$ 时, 有

$$\overline{\left(\frac{(\xi^G)_B(1_G)}{\xi^G(1_G)}\right)} = 0.$$

所以结论 (a) 由赋值 ν_p 的定义推出; 结论 (b) 可由关系 $(\xi^G)_{b^G} \neq 0$ 得到. □

(11.3.7) 定义 对于 $\theta \in \mathrm{cf}_K(G) \bigcup \mathrm{cf}_K(G_{p'})$, 定义 $\widetilde{\theta} \in \mathrm{cf}_K(G; G_{p'})$ 如下: 当 $x \in G_{p'}$ 时, 置 $\widetilde{\theta}(x) = |G|_p \theta(x)$; 当 $x \in G \setminus G_{p'}$ 时, 置 $\widetilde{\theta}(x) = 0$ (比较定义 (10.1.9)).

(11.3.8) 引理 如果 $\theta \in \mathrm{ch}_K(G) \bigcup \mathrm{Bch}(G)$, 则 $\widetilde{\theta} \in \mathrm{ch}_K(G)$. 此时, 如果 $\theta \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$, 则 $\widetilde{\theta}$ 的不可约分量都属于 B.

证 前一结论由定理 (9.4.9)′ 和 (10.1.2) (f) 推出. 而后一结论的证明留给读者完成 (见习题 1). □

以下推论是证明第三主要定理的关键:

(11.3.9) 推论 设 $H \leqslant G$ 和 $b \in \mathrm{Bl}(H)$. 设 b^G 有定义. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $\psi \in \mathrm{Irr}_K(H) \bigcap b$. 我们有

(a) 如果 $\chi \notin b^G$, 则

$$\frac{\widetilde{(\chi_H, \psi)}}{\psi(1)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}.$$

(b) 如果 $\chi \in b^G$ 有高度零, 则

$$\frac{\widetilde{(\chi_H, \psi)}}{\psi(1)} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}.$$

证 根据 $\widetilde{}$ 函数的定义易见:

$$\widetilde{\chi_H}=\frac{1}{[G:H]_p}\widetilde{\chi}_H.$$

据引理 (11.3.8) 知: $\widetilde{\chi}\in \mathrm{ch}_K(G)$. 设对于某 $B\in \mathrm{Bl}(G)$ 有 $\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$. 据引理 (11.3.8) 知:

$$(\widetilde{\chi},\theta)=(\widetilde{\chi},\theta_B),\qquad \forall\,\theta\in \mathrm{cf}_K(G).$$

由定理 (5.2.4) 知:

$$\begin{aligned}\frac{(\widetilde{\chi_H},\psi)}{\psi(\mathbf{1}_G)}&=\frac{1}{[G:H]_p}\frac{(\widetilde{\chi}_H,\psi)}{\psi(\mathbf{1}_G)}=\frac{1}{[G:H]_p}\frac{(\widetilde{\chi},\psi^G)}{\psi(\mathbf{1}_G)}=\frac{1}{[G:H]_p}\frac{(\widetilde{\chi},(\psi^G)_B)}{\psi(\mathbf{1}_G)}\\&=\frac{[G:H]}{[G:H]_p}\frac{(\widetilde{\chi},(\psi^G)_B)}{\psi^G(\mathbf{1}_G)}=[G:H]_{p'}\frac{((\psi^G)_B,\widetilde{\chi})}{\psi^G(\mathbf{1}_G)}\\&=[G:H]_{p'}\frac{|G|_p}{|G|}\sum_{\mathcal{L}\in \mathrm{Cl}(G_{p'})}\frac{|\mathcal{L}|(\psi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\psi^G(\mathbf{1}_G)}\chi(x_{\mathcal{L}}^{-1})\\&=\frac{1}{|H|_{p'}}\sum_{\mathcal{L}\in \mathrm{Cl}(G_{p'})}\frac{|\mathcal{L}|(\psi^G)_B(x_{\mathcal{L}})}{\psi^G(\mathbf{1}_G)}\chi(x_{\mathcal{L}}^{-1}).\end{aligned}$$

当 $b^G\neq B$ 时, 由引理 (11.3.5)(c) 知上式为 0 (mod m); 而当 $b^G=B$ 时, 由引理 (11.3.5)(b) 知上式为

$$\frac{(\widetilde{\chi_H},\psi)}{\psi(\mathbf{1}_G)}=\frac{1}{|H|_{p'}}\sum_{\mathcal{L}\in \mathrm{Cl}(G_{p'})}\frac{|\mathcal{L}|\chi(x_{\mathcal{L}})}{\chi(\mathbf{1}_G)}\chi(x_{\mathcal{L}}^{-1})\equiv[G:H]_{p'}\frac{(\widetilde{\chi},\chi)}{\chi(\mathbf{1}_G)}(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}).$$

当 $\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B$ 的高度等于零时, 我们有 $\nu_p((\widetilde{\chi},\chi))=\nu_p(\chi(\mathbf{1}_G))$ (见习题 2). 这推出

$$\frac{(\widetilde{\chi},\chi)}{\chi(\mathbf{1}_G)}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}).$$

引理得证. □

(11.3.10) 定理 (Okuyama) 设 $H\leqslant G$ 和 $\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)$ 满足 $\chi_H\in \mathrm{Irr}_K(H)$. 设 χ 和 χ_H 在它们各自所属的块 B,b 里都有零高度. 如果 $e\in \mathrm{Bl}(H)$, 且 e^G 有定义. 则 $e=b$ 当且仅当 $e^G=B$.

证 写 $\psi=\chi_H$. 先设 $e=b$, 且 b^G 有定义. 要证: $b^G=B$. 这只要证: $\chi\in b^G$. 因为 $\psi\in \mathrm{Irr}_K(H)\bigcap b$ 有零高度, 所以由习题 2 的结论得:

$$\frac{(\widetilde{\chi_H},\psi)}{\psi(\mathbf{1}_G)}=\frac{(\widetilde{\psi},\psi)}{\psi(\mathbf{1}_G)}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}).$$

因此由引理 (11.3.9)(a) 知: $\chi \in b^G$.

现设 $e^G = B$. 要证: $b = e$. 令 $\xi \in \mathrm{Irr}_K(H) \bigcap e$. 因为 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap e^G$ 有零高度, 所以由习题 2 的结论知:

$$(\widetilde{\psi}, \xi) = (\widetilde{\chi_H}, \xi) \neq 0.$$

由于 ψ 属于 b, 由引理 (11.3.8) 知: $\xi \in \mathrm{Irr}_K(H) \bigcap b$. 因此 $e = b$. □

现在我们可以证明第三主要定理了.

定理 (11.3.2) 的证明 因为 $(1_G)_H = 1_H$, 且 1_G 和 1_H 在各自所在块里的高度都为零, 所以本定理的结论可由推论 (11.3.9) 导出. □

习 题

1. 设 $\theta \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$. 证明: $\widetilde{\theta}$ 的不可约分支 ψ 都属于 B.

提示 $0 \neq (\widetilde{\theta}, \psi) = |G|_p (\theta, \psi)_{p'} = |G|_p \sum_{\phi,\mu \in \mathrm{IBr}(G)} (\phi, \mu)_{p'} d_{\theta\phi} d_{\psi\mu}$, 这里 $(\theta, \psi)_{p'} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{p'}} \theta(g) \psi(g^{-1})$. 因此存在某 $\phi, \mu \in \mathrm{IBr}(G)$ 使得 $(\phi, \mu)_{p'} d_{\theta\phi} d_{\psi\mu} \neq 0$. 这推出 $\psi \in B$.

2. 证明: 当 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$ 的高度等于零时, 有 $\nu_p((\widetilde{\chi}, \xi)) = \nu_p(\xi(1_G)), \forall \xi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$.

提示 设 $|G|_p = p^a$. 据引理 (11.3.8), 可写 $\widetilde{\chi} = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B} (\widetilde{\chi}, \xi) \xi$. 利用事实 "$\widetilde{\chi}(x) \in p^a R$, $\forall x \in G$" 可证: $\nu_p((\widetilde{\chi}, \xi)) \geqslant \nu_p(\xi(1_G)) \geqslant a - d(B)$, $\forall \xi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$. 记 $c = \nu_p(\chi(1_G))$. 证明: c 是满足 $\frac{1}{p^c} \widetilde{\chi} \in \mathrm{ch}_K(G)$ 的最大整数. 由此证明: 存在某 $\xi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$ 使得 $\nu_p((\widetilde{\chi}, \xi)) = a - d(B)$. 再证明: 对于任何 $\eta \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$ 都有 $\frac{(\widetilde{\chi}, \eta)}{\eta(1)} \equiv \frac{(\widetilde{\chi}, \xi)}{\xi(1)} \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$. 取 $\eta = \chi$, 即得所要结论.

3. 设 G 是单群, B 是 G 的主 p 块. 设 $\chi \in B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G)$ 且 $\chi(1_G)$ 是 p 幂. 则 $\chi = 1_G$.

提示 只要考虑 $p \mid |G|$ 的情形. 设 P 是 G 的 Sylow p 子群. 取 $g \in Z(P) - \{1_G\}$. 利用 $\chi(g)|\mathrm{Cl}(g)|/\chi(1_G)$ 的整性 (见 §4.4 的定理 (4.4.5)) 证明: $\chi(g) \neq 0$. 再利用关系 $(\chi(1_G), |\mathrm{Cl}(g)|) = 1$ 和 Burnside 定理 (4.4.9) 推出 $g \in Z(\chi)$. 最后由 G 是单群的假设得到等式 $\chi = 1_G$.

4. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$ 和 $g \in G$. 设素数 p 不整除 $|G|/\chi(1_G)$, 但整除 $o(g)$. 证明: $\chi(g) = 0$.

提示 定义 G 上函数 μ 使得 $\mu(x) = \chi(x)$, $\forall x \in G_{p'}$; $\mu(x) = 0$, $\forall x \in G \setminus G_{p'}$. 利用 Brauer 定理 (7.2.8) 证明: μ 是 G 的广义特征标. 然后由关系式 $0 < (\mu, \chi) \leqslant (\chi, \chi) = 1$ 推出: $0 = (\chi - \mu, \chi) = (1/|G|) \sum_{g \in G \setminus G_{p'}} |\chi(g)|^2$.

5.(Brauer) 设 G 是阶数为 $p^a q^b r$ 的单群, 其中 p, q, r 是互异素数, $a, b > 0$. 令 S 为 G 的 Sylow r 子群. 证明: $S = C_G(S)$.

提示 用反证法. 如果 $S \subset C_G(S)$, 则存在阶数等于 pr 或 qr 的元素 $x \in G$. 不妨设 $o(x) = pr$. 令 B 为 G 的主 p 块. 由推论 (10.2.12) 知:

$$-1 = \sum_{\substack{\chi \in B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G) \\ q \mid \chi(1_G)}} \chi(1_G)\chi(x^{-1}) + \sum_{\substack{\chi \in B \bigcap \mathrm{Irr}_K(G) \\ \chi \neq 1_G; q \nmid \chi(1_G)}} \chi(1_G)\chi(x^{-1}).$$

利用习题 3 的结论推出第二个和式里所出现的 χ 满足条件 $r \mid \chi(1_G)$. 再由 $r \mid o(x)$ 和习题 4 的结论推出 $\chi(x) = 0$. 由此得到 $-1/q$ 是代数整数的结论, 矛盾.

6. 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 定义块 **B** 的核为 $\mathrm{Ker}\,(B) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B} \mathrm{Ker}\,\chi$. 证明:

(a) 如果 $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$, 则 $\mathrm{Ker}\,(B) = \mathbf{O}_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi)$.

(b) 如果 B_0 是 G 的主块, 则 $\mathrm{Ker}\,(B_0) = \mathbf{O}_{p'}(G)$.

提示 利用推论 (10.2.12) 证明: $\mathrm{Ker}\,(B)$ 是 p' 群, 含于 $\mathbf{O}_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi)$ 内. 再利用定理 (6.1.1) 证明: $\mathbf{O}_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi) \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi, \forall \psi \in \mathrm{Irr}_K(G) \bigcap B$.

7. 设 $\phi \in \mathrm{IBr}(G), (\rho, V)$ 是由 ϕ 所确定的 k 表示. 定义 ϕ 的核 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 为 $\mathrm{Ker}\,\rho$. 证明:

(a) $\mathbf{O}_p(G) \subseteq \mathrm{Ker}\,\phi$.

(b) 如果 $g \in G_{p'}$, 则 $g \in \mathrm{Ker}\,\phi$ 当且仅当 $\phi(g) = \phi(1_G)$.

(c) 对于 $B \in \mathrm{Bl}(G)$, 记 $M = \bigcap_{\psi \in \mathrm{IBr}(G) \bigcap B} \mathrm{Ker}\,\psi$. 则 $M/\mathrm{Ker}\,(B) = \mathbf{O}_p(G/\mathrm{Ker}\,(B))$.

第十二章　顶点和源头

设 (K,R,k) 是 p 模系统, E 是单 $K[G]$ 模, E_1 是 E 中 $R[G]$ 格. 由 §9.1，习题 5 知: E_1 作为 $R[G]$ 格不可分解. 于是, 不可分解 $R[G]$ 格的分类与单 $K[G]$ 模及其特征标密切相关. 本章介绍 Green 在不可分解 $R[G]$ 格方面的工作, 从那里可看到表示理论与群 G 的 p 局部结构的深层次联系. Green 的结果可加深我们对 Brauer 块理论的理解.

在本章里, 我们将 $R[G]$ 格的定义条件稍微减弱一点: 称 M 为 $\boldsymbol{R[G]}$ **格**, 如果 M 是有限生成 $R[G]$ 模, 其作为 R 模是射影的. 注意: 在前三章里我们要求 $R[G]$ 格作为 R 模是自由的 (见 (9.1.3)). 已知每个自由 R 模都是射影的 (见 §1.8, 习题 6).

§12.1　群环上的相对射影模和相对内射模

设 $H,K\leqslant G$. 回忆记号 $H\leqslant_G K$ 和 $H=_G K$(见 §5.5).

对于 $R[G]$ 模 M, N, 用记号 $M\mid N$ 表 M 等于 (或同构于) N 的直和项.

(12.1.1) 定义　设 $H\leqslant G$. 称有限生成 $R[G]$ 模 M 为$\boldsymbol{(G,\ H)}$ **射影**, 如果对于每个 $R[G]$ 模的短正合列

$$O\longrightarrow M'\longrightarrow M''\longrightarrow M\longrightarrow O, \tag{1}$$

只要 (由 $R[G]$ 作用的限制而得的) $R[H]$ 模的短正合列

$$O\longrightarrow M'_H\longrightarrow M''_H\longrightarrow M_H\longrightarrow O \tag{2}$$

分裂, 就必能推出 (1)式分裂. 称 M 为 **(G, H) 内射**, 如果对于每个 $R[G]$ 模的短正合列

$$O \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow O, \tag{3}$$

只要 (由 $R[G]$ 作用的限制而得的)$R[H]$ 模的短正合列

$$O \longrightarrow M_H \longrightarrow M'_H \longrightarrow M''_H \longrightarrow O \tag{4}$$

分裂, 就必能推出 (3)式分裂.

考虑定义中的二种极端情形: 当 $H = G$ 时, 条件 "(G, G) 射影" 平凡. 另一方面, 设 $H = \{1_G\}$. 则每个射影 $R[G]$ 模都 $(G, \{1_G\})$ 射影, 但逆命题不总是成立, 这因为 R 模的短正合列不总分裂.

(12.1.2) 定理 (Gaschütz) 设 M 是 $R[G]$ 模, $H \leqslant G$. 则下列条件等价:

(a) M 是 (G, H) 射影.

(b) M 是 (G, H) 内影.

(c) 令 $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} g_i H$. 则存在 $\gamma \in \mathrm{End}_{R[H]} M_H$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \gamma g_i^{-1} = 1_M.$$

(d) $M \mid {M_H}^G$.

(e) 存在某 $R[H]$ 模 L 使得 $M \mid L^G$.

(12.1.3) 引理 设 M 是 $R[G]$ 模, L 是 $R[H]$ 模, $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} g_i H$, 其中 $g_1 = 1_G$. 则

(a) 由公式

$$L^G = (1_G \otimes L) \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{n} (g_i \otimes L) \right)$$

给出 L^G 的 $R[H]$ 模直和分解. 特别, $M_H \mid ({M_H}^G)_H$.

(b) 由 $\psi(\sum g_i \otimes m_i) = \sum g_i m_i$ 所给出的映射

$$\psi : {M_H}^G \longrightarrow M$$

是 $R[G]$ 模满同态. 作为 $R[H]$ 模同态, ψ 关于映射 $\lambda : M \longrightarrow {M_H}^G$ 分裂, 这里 $\lambda(m) = 1_G \otimes m$, $\forall m \in M$.

该引理的结论可从诱导模的性质 (见 §5.1 ~ 5.2) 直接推出, 故留给读者作为练习.

定理 (12.1.2)的证明 根据引理 (12.1.3), 我们有 (a) $\Longrightarrow$ (d) 和 (b)$\Longrightarrow$ (d). 余下要依次证明: (e) $\Longrightarrow$ (c); (c)$\Longrightarrow$ (b); (c) $\Longrightarrow$ (a); (d)$\Longrightarrow$ (e).

(e) $\Longrightarrow$ (c): 设存在 $R[H]$ 模 L 使得 $M \mid L^G$. 可不失一般性地假设 $M \subseteq L^G$, 故存在 $R[G]$ 模投影 $\pi : L^G \longrightarrow M$ 使得在 M 上有 $\pi = 1_M$. 定义 $\gamma^* \in \mathrm{End}_{R[H]}(L^G)$ 如下:

$$\gamma^*\left(\sum g_j \otimes l_j\right) = \mathbf{1}_G \otimes l_1,$$

这里 $g_1 = \mathbf{1}_G$. 易证: $\sum g_i \gamma^* g_i^{-1}$ 作为恒等变换算子作用于 L^G. 置

$$\gamma = \pi \cdot \gamma^* \mid_M \in \mathrm{End}_{R[H]} M.$$

于是, 对于 $m \in M$,

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \gamma g_i^{-1} m = \pi\left(\sum g_i \gamma^* g_i^{-1} m\right) = \pi(m) = m,$$

这推出 (c).

(c) $\Longrightarrow$(b): 设 (c) 成立. 设 M 和 M' 都是 $R[G]$ 模使得 $M \subseteq M'$, 且 M 是 M' 的 $R[H]$ 模直和项. 故存在从 M' 到 M 上的 $R[H]$ 模投影 π . 置

$$\pi' = \sum_{i=1}^{n} g_i \gamma \pi g_i^{-1},$$

这里 γ 是在 (c) 里给出的映射. 容易验证: $\pi' \in \mathrm{End}_{R[G]} M'$, 且 π' 是从 M' 到 M 上的投影. 于是, M 是 M' 的 $R[G]$ 模直和项, 这证明了 M 是内射 $R[G]$ 模, (b) 得证.

(c) $\Longrightarrow$ (a): 设 $\varphi : M' \longrightarrow M$ 是 $R[G]$ 模满同态, 设 $\xi : M_H \longrightarrow M'_H$ 是 $R[H]$ 模同态, 满足 $\varphi\xi = 1_M$. 设 (c) 成立, 置 $\xi' = \sum g_i \xi \gamma g_i^{-1}$. 容易验证: $\xi' \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(M, M')$ 和 $\varphi\xi' = 1_M$. 则 φ 作为 $R[G]$ 模同态是分裂的. 这推出 M 是 (G, H) 射影.

(d) $\Longrightarrow$ (e): 显然. □

作为定理 (12.1.2) 的一个应用, 我们有

(12.1.4) 命题　*设 R 是任意交换环, $H \leqslant G$. 则有*

(a) $R[G]$ 格的直和项是 $R[G]$ 格.

(b) 如果 L 是 $R[H]$ 格, 则 L^G 是 $R[G]$ 格.

(c) $R[H]$ 格 L 不可分解当且仅当对于每个 $a \in G$, 共轭 $R[{}^aH]$ 格 ${}^aL$ (见 (2.3.4)) 不可分解.

(d) $({}^aL)^G \cong L^G, \forall\, R[H]$ 格 L 和 $a \in G$.

(e) 设 $M = M_1 \oplus M_2$ 是 $R[G]$ 格直和分解. 则 M 是 (G, H) 射影当且仅当 M_1 和 M_2 都是 (G, H) 射影.

(f) 如果 M 是 (G, H) 射影的 $R[G]$ 格, 则 M 也是 $(G, {}^aH)$ 射影, $\forall a \in G$.

(g) $R[G]$ 格 M 是 (G,H) 射影当且仅当它是 (G,H') 射影, $\forall H' \geqslant_G H$.

(h) 如果 M 是 $R[G]$ 格, 且存在某 $H_0 \leqslant H$ 和某 (H,H_0) 射影的 $R[H]$ 格 L 使得 $M \mid L^G$, 则 M 是 (G,H_0) 射影.

(i) 设指数 $[G:H]$ 是 R 中可逆元. 则每个 $R[G]$ 模 M 是 (G,H) 射影, 且 $M \mid {M_H}^G$.

证 (a)—(e) 的证明留给读者作练习.

(f) 由定理 (12.1.2) 知: 存在某 $R[H]$ 格 L 使得 $M \mid L^G$. 由 (d) 得: $L^G \cong ({}^aL)^G$, 且 ${}^aL$ 是 $R[{}^aL]$ 格. 再由定理 (12.1.2) 知: M 是 $(G, {}^aH)$ 射影.

(g) 设存在某 $R[H]$ 格 L 使得 $M \mid L^G$. 令 $H \leqslant_G H'$. 故存在某 $x \in G$ 满足 ${}^xH \leqslant H'$. 则 ${}^xL$ 是 $R[{}^xH]$ 模, $({}^xL)^{H'}$ 是 $R[H']$ 模. 由诱导算子的可递性 $(({}^xL)^{H'})^G \cong ({}^xL)^G \cong L^G$ 得: $M \mid (({}^xL)^{H'})^G$. 因此据定理 (12.1.2) 得: M 是 (G,H') 射影. 其逆显然.

(h) 据定理 (12.1.2) 知: 存在某 $R[H_0]$ 模 L_0 使得 $L \mid L_0^H$. 由题设知: $M \mid L^G$. 故由张量积的可加性得: $M \mid (L_0^H)^G$. 再由诱导算子的可递性得: $M \mid L_0^G$, 故由定理 (12.1.2) 知: M 是 (G,H_0) 射影.

(i) 令 $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^n g_iH$. 定义 $\gamma \in \mathrm{End}_{R[H]}(M_H)$ 如下: $\gamma(m) = [G:H]^{-1}m$, $\forall m \in M$. 则 $\sum g_i\gamma g_i^{-1} = 1_M$, 且由定理 (12.1.2) 知: M 是 (G,H) 射影. □

(12.1.5) 注意 命题 (12.1.4) 里的绝大多数结论对于任意有限生成的 $R[G]$ 模都成立. 我们之所以局限于 $R[G]$ 格, 是因为本节只关心 $R[G]$ 格的分类. 必须注意: 取直和项, 取共轭, 取诱导模等等关于模的算子都将格变到格.

在定理 (12.1.2) 中所涉及的关于 (G,H) 射影的等价条件, 用得最多的应是 (e), 它断言: 存在某 $R[H]$ 模 L 使得 $M \mid L^G$. 在下面的讨论中将以此作为 (G,H) 射影性的最方便定义.

习 题

1. 利用 §5.1—5.2 的结果来证明引理 (12.1.3).

2. 证明定理 (12.1.2) 的推理 "(a)⟹(d)" 与 "(b)⟹(d)".

3. 证明命题 (12.1.4) 的结论 (a)—(e).

4. 设 H 是有限群 G 的 Sylow p 子群, k 是特征 p 的域. 证明: 不可分解 $k[G]$ 模同构类的个数有限当且仅当不可分解 $k[H]$ 模同构类的个数有限.

提示 利用定理 (12.1.2) 和命题 (12.1.3).

5. 设 $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ 满足条件 $o(a) = o(b) = p$, 设 k 是特征 p 的域. 证明: 对于任何正整数 n, 存在维数等于 $2n+1$ 的不可分解 $k[G]$ 模.

提示 设 M 是以 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ 为基的 k 空间. 定义 $ax_i = bx_i = x_i$, $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$; $(a-1)y_i = x_i$ 和 $(b-1)y_i = x_{i-1}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. 可证 M 是所要求的

$k[G]$ 模.

6. 设 G 是 p 群, k 是特征 p 的域. 证明: 如果 G 不是循环群, 则存在无限多个不可分解 $k[G]$ 模的同构类.

提示 利用习题 4, 5 的结论.

§12.2 顶点和源头

(12.2.1) 本章的剩余部分提到有限群 G, 素数 p 和交换环 R 时, 我们总设定以下二个条件之一成立:

(A) R 是特征 p 的完善域.

(B) R 是以 K 为分式域, 以 $\mathfrak{m}$ 为极大理想的离散赋值环, 使得 $\overline{R} = R/\mathfrak{m}$ 是特征 p 的完善域, char.$K = 0$, K 关于 G 充分大 (见 (9.1.1)), 且 R 在由离散赋值所确定的拓扑里完备 (见 (1.2.11)).

这里条件 "$\overline{R}$ 是完善域" 可确保以下结论对于任何群 G 成立: $R[G]$ 模 L 绝对不可分解当且仅当 $\mathrm{End}_{R[G]}L/\mathrm{Rad.}(\mathrm{End}_{R[G]}L) \cong \overline{R}$ (见 Curtis-Reiner [2], vol. I, 定理 (30.29)).

对于 p 模系统 (K, R, k), 下文的结果会用到 R 模和 k 模上去.

本章将只考虑 $R[G]$ 格. 当 R 是特征 p 的域时, 每个有限生成 $R[G]$ 模都是 $R[G]$ 格.

以 $\mathfrak{Ind}(R[G])$ 记所有不可分解 $R[G]$ 模组成的集合.

我们在环 R 上的假设条件保证 K-S-A 定理对于所有的 $R[G]$ 模 M 成立:

(12.2.2) K-S-A 定理 (Krull-Schmidt-Azumaya) *在 (12.2.1) 的设定下, 设 M 是 $R[G]$ 模. 则 M 是有限个不可分解 $R[G]$ 模的直和:*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i, \quad U_i \in \mathfrak{Ind}(R[G]),$$

这里直和项的多重集 $\{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 在同构意义下由 M 所唯一确定.

除了定理 (12.2.2) 外, 下文中常要用到的另一个结论是 Mackey 的子群定理 (5.3.1).

(12.2.3) 定义 *设 M 是 $R[G]$ 格. 记 $\mathcal{V}(M) = \{H \leqslant G \mid M$是 (G, H) 射影$\}$, 它是关于关系 $\leqslant_G$ 的偏序集.*

注意 因为 M 是 (G, G) 射影, 所以 $\mathcal{V}(M) \neq \varnothing$. 又由命题 (12.1.4)(g) 知: 如果 $H \in \mathcal{V}(M)$, 且 $H \leqslant_G H'$, 则 $H' \in \mathcal{V}(M)$.

(12.2.4) 定理 *令 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$. 则存在 $D \in \mathcal{V}(M)$ 使得 $D \leqslant_G H$, $\forall H \in \mathcal{V}(M)$.*

定理的证明基于以下二个引理.

(12.2.5) 引理 设 $D, H \leqslant G$. 设 $R[G]$ 格 M, $R[D]$ 格 L 和 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 满足 $M \mid L^G$ 与 $U \mid M_H$. 则存在 $a \in G$ 使得 $U \mid ({}^aL_{{}^aD\bigcap H})^H$, 且 U 是 $(H, {}^aD\bigcap H)$ 射影.

证 据子群定理 (5.3.1) 知:

$$(L^G)_H = \bigoplus_{a\in\Delta}({}^aL_{{}^aD\bigcap H})^H,$$

这里 Δ 是 G 关于 (H, D) 双陪集的一个代表元集合. 由 $M \mid L^G$ 推出: $M_H \mid (L^G)_H$. 由于 $U \mid M_H$ 和 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$, 从定理 (12.2.2) 知: 存在某 $a \in \Delta$ 使得 $U \mid ({}^aL_{{}^aD\bigcap H})^H$. 因此据定理 (12.1.2) 得: U 是 $(H, {}^aD\bigcap H)$ 射影.□

(12.2.6) 引理 设 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$, 设以下条件 (a)—(c) 成立:

(a) D 是 $\mathcal{V}(M)$ 中关于偏序关系 $\leqslant_G$ 的极小元.

(b) $M \mid L^G$, 这里 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$.

(c) H 是 $\mathcal{V}(M)$ 中任意元.

则存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得

$$U \mid M_H, \quad M \mid U^G,$$

且对于这个 $R[H]$ 格 U, 存在 $a \in G$ 满足

$${}^aD \leqslant H, \quad U \mid ({}^aL)^H.$$

证 由于 M 是 (G, H) 射影, 由定理 (12.1.2) 知: $M \mid {M_H}^G$. 据定理 (12.2.2), 存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得

$$M \mid U^G, \quad U \mid M_H.$$

据引理 (12.2.5) 知: 对于这个 $R[H]$ 格 U, 存在 $a \in G$ 使得 $U \mid ({}^aL_{{}^aD\bigcap H})^H$. 故由定理 (12.1.2) 知: U 是 $(H, {}^aD\bigcap H)$ 射影. 据命题 (12.1.4)(h), M 是 $(G, {}^aD\bigcap H)$ 射影. 但 ${}^aD\bigcap H \leqslant_G D$, 由 $D \in \mathcal{V}(M)$ 的极小性得: ${}^aD\bigcap H =_G D$, 因此 ${}^aD \leqslant H$ (如否, 则 $|{}^aD\bigcap H| < |D|$, 矛盾). 于是, 条件 $U \mid ({}^aL_{{}^aD\bigcap H})^H$ 此时变成 $U \mid ({}^aL)^H$. □

定理 (12.2.4) 的证明 令 D 为 $\mathcal{V}(M)$ 里的极小元, 令 $H \in \mathcal{V}(M)$. 据引理 (12.2.6) 得: $D \leqslant_G H$. □

(12.2.7) 定义 令 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$. 设 $D \in \mathcal{V}(M)$ 满足: $D \leqslant_G H$, $\forall H \in \mathcal{V}(M)$ (见定理 (12.2.4)). 称 D 为 M 的**顶点** (vertex). 以 $\mathrm{vtx}(M)$ 记由 M 的所有顶点组成的集合. 如果 D 是 M 的顶点, $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 满足 $M \mid L^G$, 则称 L 是 M 的**源头**(source).

(12.2.8) 注意　据定理 (12.2.4), 每个 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 都有顶点. 据命题 (12.1.4)(g) 和偏序关系 $\leqslant_G$ 知: 集合 $\mathrm{vtx}(M)$ 形成 G 的子群的单一共轭类. 现令 $D \in \mathrm{vtx}(M)$, 则 M 是 (G, D) 射影, 且存在某 $R[D]$ 格 X 使得 $M \mid X^G$. 据定理 (12.2.2), 存在满足 $L \mid X$ 的某 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 使得 $M \mid L^G$. 于是, 对于每个 $D \in \mathrm{vtx}(M)$, 在 $\mathfrak{Ind}(R[D])$ 里存在 M 的源头 L.

(12.2.9) 命题　设 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$. 则

(a) $\mathrm{vtx}(M)$ 是 G 的 p 子群的单一共轭类.

(b) 设 $D \in \mathrm{vtx}(M)$, 设 $L, L' \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 都是 M 的源头, 则存在某 $x \in N_G(D)$ 使得 $L' \cong {}^xL$.

证　(a) 令 $D \in \mathrm{vtx}(M)$. 我们在 (12.2.8) 里已证: $\mathrm{vtx}(M)$ 由 D 的所有共轭子群组成. 现设 S 是 G 的 Sylow p 子群. 则整数 $[G:S]$ 与 p 互素. 故由假设 (12.2.1)(A) 或 (B) 知: $[G:S]$ 是 R 中可逆元. 据命题 (12.1.4)(i) 知: M 是 (G, S) 射影. 因此由定义 (12.2.7) 知: $D \leqslant_G S$, 这推出 D 是 G 的 p 子群.

(b) 将引理 (12.2.6) 应用于 M, D, L, 并取 $H = D$, 得知: 存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 和 $a \in G$ 使得 $U \mid ({}^aL)^D$ 和 ${}^aD \leqslant D$, 这里 U 的选取与 L 无关. 则 $a \in N_G(D)$ 和 $U \cong {}^aL$. 再应用引理 (12.2.6), 并以 L' 代 L, 得知: 存在某 $a' \in N_G(D)$ 使得 $U \cong {}^{a'}L'$. 这推出: $L' \cong {}^xL$, 其中 $x = (a')^{-1}a \in N_G(D)$. □

习　题

1. 设有限群 H 有一个循环正规 Sylow p 子群 $D = \langle x \mid x^{p^d} = 1\rangle$, 设 k 是特征 p 的任意域 (不必为 H 的分裂域). 令 $\{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 为不可分解射影 $k[H]$ 模同构类的代表系. 因此存在某些 $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, 使得 $k[H] \cong \bigoplus_{i=1}^s U_i^{n_i}$. 令 $N = \mathrm{Rad}.\, k[D] = (x-1)k[D]$.

(a) 证明: N 是 $k[D]$ 的指数等于 p^d 的幂零理想 (即 p^d 是满足 $N^t = 0$ 的最小正整数 t).

置 $F_i := U_i/(\mathrm{Rad}.\, k[H])U_i$.

(b) 证明: F_i 是单 $k[H]$ 模; $F_i \cong F_{i'}$ 当且仅当 $i = i'$.

(c) 证明: $\{F_i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 是单 $k[H]$ 模的完全集.

置 $T_j = k[x]/(1-x)^j k[x] = k[D]/N^j, 1 \leqslant j \leqslant p^d$.

(d) 证明: T_j 是不可分解 $k[D]$ 模; $T_j \cong T_{j'}$ 当且仅当 $j = j'$.

(e) 证明: $\{T_j \mid 1 \leqslant j \leqslant p^d\}$ 是不可分解 $k[D]$ 模的完全集.

置 $M_{ij} = U_i/N^j U_i$ 和 $T_j^H := k[H] \otimes_{k[D]} (k[D]/N^j)$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant p^d, 1 \leqslant i \leqslant s$.

(f) 证明: $T_j^H \cong \bigoplus_{i=1}^s M_{ij}^{n_i}$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant p^d$.

(g) 证明: M_{ij} 是不可分解 $k[H]$ 模; $M_{ij} \cong M_{i',j'}$ 当且仅当 $(i,j) = (i',j')$.

(h) 证明: $\{M_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant p^d, 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 是不可分解 $k[H]$ 模的完全集.

2. 设 H 是 Frobenius 群 (见 §5.4), 其 Frobenius 核 D 是阶数为 p^d 的循环群, 设 k 是关于群 H 充分大的特征 p 的域. 设 A 是 H 的 Frobenius 补.

(a) 证明: A 是交换群, 其阶数 e 整除 $p-1$; D 是 H 的 Sylow p 子群 (**提示** A 同构于 $\mathrm{Aut}(D)$ 的子群) .

(b) 证明: 每个单 $k[H]$ 模 F 满足 $\dim_k F = 1$.

(c) 设 $\Delta := \{M_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant e, 1 \leqslant j \leqslant p^d\}$, 其中 M_{ij} 如习题 1 那样定义. 证明: $\dim_k M_{ij} = j$, $\forall i, j$; Δ 是不可分解 $k[H]$ 模同构类的代表系.

(d) 证明: 如果 $M \in \mathfrak{Ind}(k[H])$, 则 $M_D \in \mathfrak{Ind}(k[D])$.

(e) 证明: 不可分解 $k[D]$ 模的任何子模都不可分解.

提示 参照习题 1 的证明, 注意 $k[A]$ 是分裂半单的交换代数, 并运用定理 (1.5.4).

3. 设群 H, D 如习题 2 里所定义, (K, R, k) 是 p 模系统, 其中 K 是关于群 H 充分大的特征零的域, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, $R[H]/\mathrm{Rad}.R[H]$ 是半单 Artin 环, 其每个幂等元都是 $R[H]$ 的幂等元在典范映射下的像. 令 M 为不可分解 $R[H]$ 格, 其模 $\mathfrak{m}$ 约化仍不可分解, 令 μ 为 H 的由 M 所提供的 K 特征标. 证明: 不等式 $(\mu_D, \phi)_D \leqslant 1$ 对于群 D 的所有线性特征标 ϕ 恒成立.

提示 记 $M_\phi = \{m \in M \mid (x - \phi(x))m = 0,\ \ \forall x \in D\}$. 证明 $M_\phi \in \mathfrak{Ind}(R[D])$, 且 $\mathrm{rank}_R M_\phi = (\mu_D, \phi)_D$. 注意 M_ϕ 的任何 R 模分解都是 $R[D]$ 模分解.

§12.3 下探与上溯,Green 不可分解定理

本节参照 Burry 的做法来介绍 Green 的工作, 这包括关于构造不可分解模的下探 (going-down) 和上溯 (going-up) 方法. 下探方法是从 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 和 $H \in \mathcal{V}(M)$ 出发去构造满足各种条件的格 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$, 这些格具有与 M 相同的顶点和源头. 上溯方法是从 $H \leqslant G$ 和 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 出发去构造 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 使得 M 和 U 具有公共的顶点和源头. 本节还将介绍 Green 不可分解定理, 它给出诱导 $R[G]$ 模绝对不可分解的一个判则. 该判则对于研究顶点和源头及其在块理论中的应用十分有用.

(12.3.1) 定理 设 $H \leqslant G$. 令 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G]), U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$, $D_M \in \mathrm{vtx}(M)$ 和 $D_U \in \mathrm{vtx}(U)$. 我们有

(a) 如果 $U \mid M_H$, 则 $D_U \leqslant_G D_M$.

(b) 如果 $M \mid U^G$, 则 $D_M \leqslant_G D_U$.

证 (a) 因为 $D_M \in \mathrm{vtx}(M)$, 所以存在 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D_M])$ 使得 $M \mid L^G$. 据引理 (12.2.5), 由条件 $U \mid M_H$ 推出: 存在 $a \in G$ 使得 U 是 $(H, {}^aD_M \bigcap H)$ 射影. 因此由定理 (12.2.4) 知: U 的顶点 D_U 满足条件

$$D_U \leqslant_H ({}^aD_M \bigcap H).$$

因为 ${}^{a}D\bigcap H \leqslant_G D$, $\forall D \leqslant G$, 所以 $D_U \leqslant_G D_M$. (a) 得证.

(b) 由于 $M \mid U^G$, 且 U 是 (H, D_U) 射影, 由定理 (12.1.4) (h) 知: M 是 (G, D_U) 射影. 故由定义 (12.2.7) 知: $D_M \leqslant_G D_U$. (b) 得证. □

接着介绍下探方法.

(12.3.2) 定理　*设 $H \leqslant G$ 和 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 满足 $H \in \mathcal{V}(M)$. 则 $\mathcal{D} = \{D \in \mathrm{vtx}(M) \mid D \leqslant H\} \neq \varnothing$, 且 $\mathcal{D}$ 可表成 H 的子群的 H 共轭类 $\mathcal{D}_i$ 的无交并:*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} \mathcal{D}_m.$$

进而, 下述结论成立:

(a) 存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $M \mid U^G$ 和 $U \mid M_H$. 对于任何这种 U, 存在某 $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$ 满足 $\mathrm{vtx}(U) = \mathcal{D}_i$.

(b) 对于给定的 $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$, 存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $U \mid M_H$ 和 $\mathrm{vtx}(U) = \mathcal{D}_i$.

(c) 对于给定的 $\mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{D}$, 存在 $W \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $M \mid W^G$ 和 $\mathrm{vtx}(W) = \mathcal{D}_j$.

(d) 对于任何满足 $U \mid M_H$ 和 $\mathrm{vtx}(U) \subseteq \mathcal{D}$ 的 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$, 格 U 和 M 有公共的顶点和源头.

(12.3.3) 注意　在开始证明之前, 对于给定的 $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$, 没有理由指望 (b) 与 (c) 被同一个 $R[H]$ 格满足. 下面会对这一点作进一步讨论.

证　据命题 (12.2.9) (a), $\mathrm{vtx}(M)$ 形成 G 的子群的单一共轭类. 由引理 (12.2.6) 和条件 $H \in \mathcal{V}(M)$ 推出: $D \leqslant_G H, \forall D \in \mathrm{vtx}(M)$. 故存在 M 的落在 H 内的顶点. 显然, $\mathcal{D}$ 可被表成子群的 H 共轭类的并. 让我们依次来证明结论 (a)—(d).

(a) 由于 $H \in \mathcal{V}(M)$, M 是 (G, H) 射影. 据定理 (12.1.2) 知: $M \mid {M_H}^G$. 故据定理 (12.2.2) 知: 存在某 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $U \mid M_H$ 和 $M \mid U^G$. 对于任何这样的 U, 令 $D \in \mathrm{vtx}(U)$. 则由定理 (12.3.1) 得: $D \in \mathrm{vtx}(M)$. 故由命题 (12.2.9) (a) 知: 存在某 $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$ 使得 $\mathrm{vtx}(U) = \mathcal{D}_i$.

(b) 对于固定的类 $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$, 令 $D \in \mathcal{D}_i$. 则 $D \in \mathrm{vtx}(M)$, 所以 $D \in \mathcal{V}(M)$. 在 (a) 里以 D 代 H, 则 D 是 M 的落在 D 里的唯一顶点. 因此存在 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 使得 $L \mid M_D$ 和 $D \in \mathrm{vtx}(L)$. 由于 $D \leqslant H \leqslant G$, 据定理 (12.2.2) 知: 存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $L \mid U_D$ 和 $U \mid M_H$. 将定理 (12.3.1)(a) 用于情形 $L \mid U_D$ 和群 D, H, 我们推出 $D \in \mathrm{vtx}(U)$, 故含 D 的类 $\mathcal{D}_i$ 与 $\mathrm{vtx}(U)$ 相一致.

(c) 对于固定的类 $\mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{D}$, 令 $D \in \mathcal{D}_j$. 由 (a) 知: 存在 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 使得 $M \mid L^G$ 和 $D \in \mathrm{vtx}(L)$. 由定理 (12.2.2) 知: 存在某 $W \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $W \mid L^H$ 和 $M \mid W^G$. 令 $D' \in \mathrm{vtx}(W)$. 则将定理 (12.3.1) (b) 用于情形 $W \mid L^H$

得 $D' \leqslant_H D$. 另一方面, 由条件 $M \mid W^G$ 和 $D \in \mathrm{vtx}(M)$ 以及定理 (12.3.1) (b) 推出: $D \leqslant_G D'$. 因此 $D' =_G D$, 进而, $D \in \mathrm{vtx}(W)$ 和 $\mathrm{vtx}(W) = \mathcal{D}_j$, (c) 得证.

(d) 由假设知: $\mathrm{vtx}(U) \subseteq \mathrm{vtx}(M)$. 我们要找出公共的源头. 令 $D \in \mathrm{vtx}(U)$, 令 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 为 M 的源头. 据引理 (12.2.5), 存在 $a \in G$ 使得

$$U \mid ({}^aL_{{}^aD \cap H})^H,$$

故 U 是 $(H, {}^aD \cap H)$ 射影. 我们断言: ${}^aD \leqslant H$. 这因为: 如否, 则 U 在 ${}^aD \cap H$ 里有比 D 更小的顶点, 由于 $D \in \mathrm{vtx}(U)$, 这与定理 (12.2.4) 相矛盾. 因为 ${}^aD \leqslant H$, 所以同样的理由可推出: ${}^aD \in \mathrm{vtx}(U)$. 即 ${}^aL \in \mathfrak{Ind}(R[{}^aD])$, 我们有 $M \mid ({}^aL)^G$ 和 $U \mid ({}^aL)^H$. 因此 ${}^aL \in \mathfrak{Ind}(R[{}^aD])$ 是 M 和 U 的公共源头, 定理得证. □

再来介绍上溯方法.

(12.3.4) 定理 *设 $H \leqslant G$ 和 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$. 则存在 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 使得 $M \mid U^G$ 和 $U \mid M_H$. U 和任何这样的模 M 有相同的顶点和源头.*

证 将引理 (12.1.3)(a) 用于 U 得: $U \mid (U^G)_H$. 由定理 (12.2.2) 知: 存在 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 使得 $M \mid U^G$ 和 $U \mid M_H$. 定理的其余结论由定理 (12.3.2)(a)、(d) 推出. □

(12.3.5) 例 (a) **不可分解射影 $R[G]$ 格.** 令 Q 为不可分解射影 $R[G]$ 格. 则 Q 是 $(G, 1_G)$ 射影的, 于是, $\mathrm{vtx}(Q)$ 由平凡子群 $\{1_G\}$ 组成, 且 $Q \mid 1_{\{1_G\}}{}^G$. 现 $1_{\{1_G\}}{}^G \cong R[G]$ 为 $R[G]$ 模, 因此 $Q \mid R[G]$. 令 S 为 G 的 Sylow p 子群, 设 $U \in \mathfrak{Ind}(R[S])$ 满足 $U \mid Q_S$. 据定理 (12.3.1) 知: $D \leqslant_G \{1_G\}$, $\forall D \in \mathrm{vtx}(U)$. 即 $\mathrm{vtx}(U) = \mathrm{vtx}(Q)$ 也由平凡子群 $\{1_G\}$ 组成. 因此每个这样的 U 都是 $(S, 1_G)$ 射影的. 由于 Q_S 的每个直和项 U 也是 R 射影的, Q_S 的直和项 U 属于 $\mathcal{P}(R[S])$, 因此 $Q_S \in \mathcal{P}(R[S])$. 由于 $R[S]$ 是局部 R 代数, 射影 $R[S]$ 模都是自由的 (见 (9.3.10)). 于是, Q_S 是自由 $R[S]$ 模. 特别, Q 的 R 秩可被 $|G|_p$ 整除.

(b) **$R[G]$ 的块.** 群 G 的直积 $G \times G$ 以如下方式作用于 $R[G]$:

$$(x, y) \cdot a = xay^{-1}, \quad \forall x, y \in G, a \in R[G].$$

则 $R[G]$ 是 $R[G \times G]$ 格. 称 $R[G]$ 的不可分解子 $R[G \times G]$ 模直和项为 **$R[G]$ 的 p 块**. 显然, 每个 p 块是 $R[G]$ 的不可分解双边理想, $R[G]$ 等于所有这些 p 块的直和 (见 (10.2.21) 和 §10.2 , 习题 4, 5) . 令 G_0 为 $G \times G$ 的对角子群, 即 $G_0 := \{(x, x) \mid x \in G\}$. 则可证: $R[G]$ 的每个 p 块是 $(G \times G, G_0)$ 射影, 而 $R[G]$ 的每个 p 块的顶点都同构于群 G 的一个 p 群.

许多关于顶点和源头及其在块理论中应用方面的较深刻结果依赖于 Green 的如下结果:

(12.3.6) 定理 (Green 不可分解定理) *设 $H \lhd G$ 满足条件 $[G:H]=p$. 设 L 是绝对不可分解 $R[H]$ 模. 则诱导 $R[G]$ 模 L^G 也绝对不可分解.*

本书略去定理 (12.3.6) 的证明, 有兴趣的读者可参阅 Curtis–Reiner [2], vol. I, 定理 (19.22).

(12.3.7) 推论 *设 G 是 p 群, $H \leqslant G$(不必正规). 如果 L 是绝对不可分解 $R[H]$ 模, 则 L^G 是绝对不可分解 $R[G]$ 模.*

证 由于 G 是 p 群, G 的任何真子群都真包含在其正规化子里. 这推出在 H 和 G 之间存在正规序列, 其每个子商都是循环 p 群. 于是, 利用诱导算子的可递性, 本结论可由定理 (12.3.6) 推出. □

下面要给出定理 (12.3.6) 的二个应用. 为此, 要先叙述一个结论:

(12.3.8) 引理 *设 R 是离散赋值环, 其关于极大理想 $\mathfrak{m}$ 的剩余类域 $\overline{R} := R/\mathfrak{m}$ 是完善域, 设 M 是有限生成 $R[G]$ 模. 则存在完备的离散赋值环 S, 它是 R 的扩充, 且剩余类域 $\overline{S}$ 是完善域, 使得 $SM = \bigoplus_i N_i$ (有限直和), 这里每个 N_i 是绝对不可分解 $S[G]$ 模.*

引理的证明从略, 有兴趣的读者可参阅 Curtis-Reiner [2], vol. I, 推论 (30.31).
第一个应用推广了例 (12.3.5)(a) 的结果.

(12.3.9) 定理 *设 M 是不可分解 $R[G]$ 格, $D \in \mathrm{vtx}(M)$, H 是 G 的含 D 的 Sylow p 子群. 则 M 的 R 秩可被 $[H:D]$ 整除.*

证 首先证明: 问题可归结到 G 是 p 群的情形. 由定理 (12.3.1)(a) 知: $R[H]$ 模 M_H 的每个不可分解直和项 U 都有顶点 D_U 满足 $D_U \leqslant_G D$. 于是, 如果我们知道了关于 p 子群 H 和 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 的有关结论, 则关于 $R[G]$ 模 M 的相应结论也就被推出.

在证明的余下部分, 我们总设 G 是 p 群. 我们将只处理 R 是离散赋值环的情形, 其余情形留给读者去做. 令 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$, $D \in \mathrm{vtx}(M)$. 据引理 (12.2.6)(b) 知: 存在某 $L \in \mathfrak{Ind}(R[D])$ 使得 $M \mid L^G$.

如果 L 是绝对不可分解 $R[D]$ 模, 则由推论 (12.3.7) 知: L^G 是绝对不可分解 $R[G]$ 模. 故 $M \cong L^G$. 于是,

$$M \text{的 } R \text{ 秩等于 } [G:D]\cdot(L \text{ 的 } R \text{ 秩}), \qquad (\text{见 §5.1})$$

由此得到所要的结论.

现在来证明如何将一般情形归结到绝对不可分解的情形. 由引理 (12.3.8) 知: 存在完备的离散赋值环 S, 它是 R 的扩环, 且剩余类域 $\overline{S}$ 完善, 使得 $SM = \bigoplus_i N_i$(有限直和), 这里每个 N_i 都是绝对不可分解 $S[G]$ 模. 如果 $D \in \mathrm{vtx}(M)$,

则由命题 (12.1.4) (e) 知: 每个 N_i 都 (G,D) 射影, 且 $D\in \mathrm{vtx}(N_i)$, $\forall\ i$. 由前面的讨论知, 每个 N_i 的 S 秩是 $[G:D]$ 的倍数. 于是, SM 的 S 秩是 $[G:D]$ 的倍数. 但是, SM 的 S 秩等于 M 的 R 秩. 这完成了定理的证明. □

第二个应用是关于特征标零点的 Green 定理.

(12.3.10) 定理 *设 R 是以 K 为分式域的完备的离散赋值环, 其剩余类域 k 是特征 p 的完善域. 令 M 为 (G,D) 射影的 $R[G]$ 格, 这里 D 是 G 的 p 子群. 设 $x\in G$ 的 p 部分 x_p 与 D 的任何元素都不共轭.* 则 $\mathrm{tr.}\,(x,M)=0$ (换言之, G 的由 $K\otimes_R M$ 所提供的 K 特征标在 x 处取零值).

证 设 $o(x)=p^bm$, 这里 $m,b\in\mathbb{N}$ 满足 $p\nmid m$. 则存在 $c,d\in\mathbb{Z}$ 使得 $cm+dp^b=1$. 于是, x 的 p 部分 x_p 和 p' 部分 $x_{p'}$ 分别等于 x^{cm} 和 x^{dp^b}, 且 $o(x_p)=p^b$ 和 $o(x_{p'})=m$. 由 $x_p\notin D$ 知: $x_p\neq 1$. 因此 $b>0$, 进而, $o(x^p)=p^{b-1}m$. 置 $X=\langle x\rangle$ 和 $Y=\langle x^p\rangle$. 则 $[X:Y]=p$, Y 可由 $x_{p'}$ 和 $x_p{}^p$ 生成, 且 X 中任何不包含 x_p 的子群都落在 Y 内. 特别, 由 $x_p\notin {}^aD$, $\forall a\in G$, 推出:

$$ {}^aD\bigcap X\leqslant Y,\quad \forall a\in G. \tag{1}$$

因为 M 是 (G,D) 射影的 $R[G]$ 格, 所以由定理 (12.1.2) 知: 存在某 $L\in \mathfrak{Ind}R[D]$ 使得 $M\mid L^G$. 这推出 $M_X\mid (L^G)_X$. 由定理 (5.3.1), 关系 $Y\leqslant X$ 和 (1) 式得:

$$(L^G)_X=\bigoplus_a (L_{{}^aD\cap X})^X=\bigoplus_a \left((L_{{}^aD\cap X})^Y\right)^X.$$

可写

$$(L_{{}^aD\cap X})^Y=\bigoplus_j N_j,$$

这里 $N_j\in\mathfrak{Ind}(R[Y])$. 据引理 (12.3.8), 可在必要时对 R 作适当扩充 (不影响迹函数的值), 不妨设 $\{N_j\}$ 都是绝对不可分解 $R[Y]$ 格. 由定理 (12.3.6) 推出: 每个 N_j^X 都是不可分解 $R[X]$ 模. 据定理 (12.2.2), M_X 同构于某些 N_j^X 的直和. 因为 X 是交换群, 且 $x\notin Y$, 所以由 §5.1(5)式可得:

$$\mathrm{tr.}(x,N_j^X)=0,\quad \forall j.$$

这推出 $\mathrm{tr.}(x,M)=0$. □

习 题

1. 在 R 是特征 p 的域的情形下证明定理 (12.3.9) 的结论.

2. 设 $H \lhd G$ 使得 G/H 是 p 群. 证明: 如果 L 是绝对不可分解 $R[H]$ 模, 则 L^G 是绝对不可分解 $R[G]$ 模.

3. 设 G 是 p 群, M 是 $R[G]$ 上的可迁置换模, 即 M 含有一组自由 R 基 X, 后者是可迁 G 集. 则 M 是绝对不可分解 $R[G]$ 模.

4. 在例子 (12.3.5)(b) 的设定下, 证明:

(a) $R[G]$ 的每个 p 块是 $(G\times G, G_0)$ 射影. (提示 由定理 (12.1.2) 知只要证明 $R[G]\cong 1_{G_0}^{G\times G}$).

(b) $R[G]$ 的每个 p 块的顶点都同构于群 G 的一个 p 群.

§12.4 Green 对应

(12.4.1) 定义 称 (G,H,D) 为 **Green 对应的容许三元组**, 如果 G 是有限群, $D,H\leqslant G$, 其中 D 是 p 群, 而 $H\supseteq N_G(D)$. 对于每个 Green 对应的容许三元组 (G,H,D), 定义以下三个子群族:

$$\begin{cases}\mathcal{X}=\mathcal{X}(D,H)=\{{}^xD\bigcap D\mid x\in G\setminus H\},\\ \mathcal{Y}=\mathcal{Y}(D,H)=\{{}^xD\bigcap H\mid x\in G\setminus H\},\\ \mathcal{A}=\mathcal{A}(D,H)=\{D^*\leqslant D\mid D^*\not\leqslant_G \mathcal{X}\},\end{cases}\tag{1}$$

这里记号 $D^*\not\leqslant_G\mathcal{X}$ 意指 $D^*\not\leqslant_G X$, $\forall X\in\mathcal{X}$. 由 $D\in\mathcal{A}$ 得: $\mathcal{A}\neq\varnothing$.

本节的主要结果是定理 (12.4.5). 设 $\overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[G])$ 是顶点属于 $\mathcal{A}$ 的不可分解 $R[G]$ 格的同构类集合. 则定理 (12.4.5) 建立了从集合 $\overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[G])$ 到 $\overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[H])$ 的 1-1 对应, 使得相对应的格具有同样的顶点和源头. 这种对应将被称为**Green 对应**.

为此, 先要引入一些记号和概念.

(12.4.2) 定义 给定群 G 的一个子群族 $\mathcal{Z}$. 称 $R[G]$ 格 M 为$(G,\mathcal{Z})$ **射影**, 如果 $M=\oplus M_i$, 其中对于每个 i, 存在某 $Z_i\in\mathcal{Z}$ 使得 M_i 是 (G,Z_i) 射影的 $R[G]$ 格. 我们用记号 $M=O(\mathcal{Z})$ 意指 M 是 $(G,\mathcal{Z})$ 射影的 $R[G]$ 格; 用记号 $M=L\oplus O(\mathcal{Z})$ 意指 M 有 $R[G]$ 格分解 $M=L\oplus N$ 使得 $N=O(\mathcal{Z})$.

(12.4.3) 引理 设 $\mathcal{Z}$ 是群 G 的一个子群族. 则有

(a) 两个 $(G,\mathcal{Z})$ 射影的 $R[G]$ 格的直和是 $(G,\mathcal{Z})$ 射影.

(b) $(G,\mathcal{Z})$ 射影的 $R[G]$ 格的直和项是 $(G,\mathcal{Z})$ 射影.

证 根据命题 (12.1.4) (e), 两个 $(G,\mathcal{Z})$ 射影的 $R[G]$ 格的直和是 $(G,\mathcal{Z})$ 射影. 故 (a) 成立. 现令 $M=O(\mathcal{Z})$, 令 $R[G]$ 格 N 满足 $N\mid M$. 据 (a), 只须证明 N 的不可分解直和项是 $O(\mathcal{Z})$. 故可设 N 不可分解. 据定义 (12.4.2), 可写 $M=\oplus M_i$, 其中对于每个 i, 存在某 $Z_i\in\mathcal{Z}$ 使得 M_i 是 (G,Z_i) 射影. 因为 $N\mid M$

和 $N \in \mathfrak{Ind}(R[G])$, 所以由定理 (12.2.2) 知: 存在某 i 使得 $N \mid M_i$. 于是, 据命题 (12.1.4) (e) 知: N 是 (G, Z_i) 射影. (b) 得证. □

(12.4.4) 引理 *设 $\mathcal{Z}$ 是群 G 的一个子群族, M 是以 D^* 为顶点的 $R[G]$ 格. 则 $M = O(\mathcal{Z})$ 当且仅当 $D^* \leqslant_G \mathcal{Z}$ (即存在某 $Z \in \mathcal{Z}$ 使得 $D^* \leqslant_G Z$).*

证 如果 $D^* \leqslant_G \mathcal{Z}$, 则存在某 $Z_i \in \mathcal{Z}$ 使得 $D^* \leqslant_G Z_i$. 于是, 由命题 (12.1.4) (g) 知: M 是 (G, Z_i) 射影, 故 $M = O(\mathcal{Z})$. 反之, 如果 $M = O(\mathcal{Z})$, 则存在某 $Z_i \in \mathcal{Z}$ 使得 M 是 (G, Z_i) 射影. 据定理 (12.2.4) 得: $D^* \leqslant_G Z_i$. □

(12.4.5) 定理 *设 (G, H, D) 是 Green 对应的容许三元组. 子群族 $\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 如 (1) 式中所定义. 则有*

(a) 存在双射 $g : \overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[G]) \longrightarrow \overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[H])$.

现设 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 和 $N \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 满足 $[M] \in \overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[G])$, $[N] \in \overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[H])$ 和 $g([M]) = [N]$.

(b) M 和 N 有相同的顶点当且仅当下面的等价条件满足:

(i) $M_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$.

(ii) $N^G = M \oplus O(\mathcal{X})$.

(c) M 和 N 有相同的顶点和源头.

(12.4.6) 定义 称定理 (12.4.5) 里的双射 g 为与 (G, H, D) **相关联的 Green 对应**.

在着手证明定理 (12.4.5) 之前, 让我们先叙述该定理的一个推论:

(12.4.7) 推论 *设 (G, H, D) 是 Green 对应的容许三元组. 则存在双射*

$$g : \{[M] \mid M \in \mathfrak{Ind}(R[G]), D \in \mathrm{vtx}(M)\} \longrightarrow \{[N] \mid N \in \mathfrak{Ind}(R[H]), D \in \mathrm{vtx}(N)\},$$

这里 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 和 $N \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 满足 $g([M]) = [N]$ 当且仅当要么 $M \mid N^G$, 要么 $N \mid M_H$.

接下来的四个引理为证明定理 (12.4.5) 作准备.

(12.4.8) 引理 *在定理 (12.4.5) 的假设条件下, 令 N 为 (H, D) 射影的 $R[H]$ 格. 则 $(N^G)_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$.*

证 由定理 (5.3.1) 知: $N \mid (N^G)_H$. 故存在某 $R[H]$ 格 N' 使得 $(N^G)_H = N \oplus N'$. 必须证明: $N' = O(\mathcal{Y})$. 因为 N 是 (H, D) 射影, 所以据定理 (12.1.2), 存在某 $R[D]$ 格 L 和 $R[H]$ 格 U 使得 $L^H = N \oplus U$. 再由定理 (5.3.1) 得: $U \mid (U^G)_H$. 故存在 $R[H]$ 格 U' 使得 $(U^G)_H = U \oplus U'$. 于是,

$$N \oplus N' \oplus U \oplus U' = (N^G)_H \oplus (U^G)_H \cong \left((L^H)^G\right)_H \cong (L^G)_H.$$

据定理 (5.3.1) 得:

$$(L^G)_H = L^H \oplus \left(\oplus_{x\notin H}({}^xL_{{}^xD\cap H})^H\right) \cong N \oplus U \oplus \left(\oplus_{x\notin H}({}^xL_{{}^xD\cap H})^H\right).$$

再由定理 (12.2.2) 推出:

$$N' \oplus U' \cong \oplus_{x\notin H}({}^xL_{{}^xD\cap H})^H = O(\mathcal{Y}).$$

据引理 (12.4.3), 我们有 $N' = O(\mathcal{Y})$. □

(12.4.9) 引理 *在定理 (12.4.5) 的假设条件下, 令 $D^* \leqslant D$. 则*

$$D^* \leqslant_G \mathcal{X} \Longleftrightarrow D^* \leqslant_H \mathcal{X} \Longleftrightarrow D^* \leqslant_H \mathcal{Y}.$$

引理 (12.4.9) 的证明留给读者作为练习.

(12.4.10) 引理 *在定理 (12.4.5) 的假设条件下, 令 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$. 设存在 $D^* \in \mathrm{vtx}(M)$ 使得 $D^* \leqslant D$. 则以下结论成立:*

(a) 如果 $M = O(\mathcal{X})$, 则 $M_H = O(\mathcal{Y})$.

(b) 如果 $M \neq O(\mathcal{X})$, 则存在 $R[H]$ 格 N 使得 $D^* \in \mathrm{vtx}(N)$, $M_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$ 和 $N \neq O(\mathcal{Y})$.

证 由定理 (12.3.2)(c), 存在某 $W \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $M \mid W^G$ 和 $D^* \in \mathrm{vtx}(W)$. 因为 $D^* \leqslant D$, 所以 W 是 (H, D) 射影. 故由引理 (12.4.8) 知:

$$(W^G)_H = W \oplus O(\mathcal{Y}).$$

我们有 $M_H \mid (W^G)_H$, 且由假设条件知 $M = O(\mathcal{X})$. 故由引理 (12.4.4) 得: $D^* \leqslant_G \mathcal{X}$. 因此由引理 (12.4.9) 推出: $D^* \leqslant_H \mathcal{Y}$. 由于 $D^* \in \mathrm{vtx}(W)$, 将引理 (12.4.4) 应用于 W 可得: $W = O(\mathcal{Y})$. 于是, 由引理 (12.4.3) 推出: $(W^G)_H = O(\mathcal{Y})$, 进而推出: $M_H = O(\mathcal{Y})$, (a) 得证.

现来证明 (b). 由定理 (12.3.2) (c) 知: 存在 $N \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 使得 $M \mid N^G$ 和 $D^* \in \mathrm{vtx}(N)$. 据引理 (12.4.8) 得: $(N^G)_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$. 因为 $M \neq O(\mathcal{X})$, 所以由引理 (12.4.4) 知: $D^* \not\leqslant_G \mathcal{X}$, 于是, 由引理 (12.4.9) 得: $D^* \not\leqslant_H \mathcal{Y}$. 再由引理 (12.4.4) 知: N 是 $(N^G)_H$ 里唯一的非 $O(\mathcal{Y})$ 的不可分解直和项. 据定理 (12.3.2)(b), M_H 含有以 D^* 为顶点的不可分解直和项. 由于 $M_H \mid (N^G)_H$ 和 $(N^G)_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$, 该直和项必须是 N. 这推出: $M_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$, 证明了 (b). □

在引理 (12.4.10) (b) 里所证得的 "N 是 $(N^G)_H$ 里唯一的非 $O(\mathcal{Y})$ 的不可分解直和项" 的事实将在定理 (12.4.5) 的证明里起关键作用.

(12.4.11) 引理 在定理 (12.4.5) 的假设条件下, 设 $N \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 和 $D^* \in \mathrm{vtx}(N)$, 其中 $D^* \leqslant D$. 则有

(a) 如果 $N = O(\mathcal{X})$, 则 $N^G = O(\mathcal{X})$.

(b) 如果 $N \neq O(\mathcal{X})$, 则 $N^G = M \oplus O(\mathcal{X})$, 这里 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 满足 $N \mid M_H$ 和 $D^* \in \mathrm{vtx}(M)$.

证 先来证明 (a). 由 $D^* \in \mathrm{vtx}(N)$ 知: N 是 (H, D^*) 射影. 于是, 由定理 (12.1.2)(d) 得: $N \mid (N_{D^*})^H$. 由诱导函子的可递性推出: $N^G \mid (N_{D^*})^G$. 因此 N^G 是 (G, D^*) 射影. 因为由引理 (12.4.4) 有 $D^* \leqslant_G \mathcal{X}$, 所以 $N^G = O(\mathcal{X})$, 这推出 (a).

(b) 的证明比较复杂. 先写

$$N^G = M_1 \oplus \cdots \oplus M_l, \qquad \text{这里 } M_i \in \mathfrak{Ind}(R[G]),\ 1 \leqslant i \leqslant l.$$

由 (a) 和命题 (12.1.4) (e) 知: 每个 M_i 都是 (G, D^*) 射影. 因此每个 M_i 都有顶点 D_i 满足

$$D_i \leqslant_G D^* \leqslant D.$$

根据引理 (12.4.10), 对于每个 $1 \leqslant i \leqslant l$, 以下两者之一必成立:

(i) $M_i = O(\mathcal{X})$ 和 $(M_i)_H = O(\mathcal{Y})$.

(ii) $M_i \neq O(\mathcal{X})$, 且 $(M_i)_H$ 恰含一个非 $O(\mathcal{Y})$ 的不可分解直和项.

据引理 (12.4.8) 得:

(iii) $(N^G)_H = N \oplus O(\mathcal{Y})$.

据 (b) 的假设 $N \neq O(\mathcal{X})$ 和引理 (12.4.4) 得: $D^* \not\leqslant_H \mathcal{X}$. 因此由引理 (12.4.9) 得: $D^* \not\leqslant_H \mathcal{Y}$. 再由引理 (12.4.4) 知: $N \neq O(\mathcal{Y})$. 由上面的 (i)—(iii) 推出: 在 N^G 里存在唯一的满足条件 $M_{i_0} \neq O(\mathcal{X})$ 的不可分解直和项 M_{i_0}. 进而, 据 (ii), N 是 $(M_{i_0})_H$ 里唯一的非 $O(\mathcal{Y})$ 的不可分解直和项. 最后, 据定理 (12.3.4), M_{i_0} 的顶点是 D^*. (b) 得证. □

定理 (12.4.5) 的证明 设 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G]), D^* \in \mathrm{vtx}(M)$ 和 $D^* \in \mathcal{A}$. 则由 (1) 式知: $D^* \not\leqslant_G \mathcal{X}$, 故由引理 (12.4.4) 有 $M \neq O(\mathcal{X})$. 由引理 (12.4.10)(b) 的证明知: M_H 含有唯一确定的不可分解直和项 $N \neq O(\mathcal{Y})$ 满足 $D^* \in \mathrm{vtx}(N)$. 现可如定理 (12.4.5) 里所要求的那样定义同构类之间的映射

$$g : [M] \mapsto [N].$$

据引理 (12.4.11) (b) 知: g 是满射. 现要证明 g 也是单射. 设 $N \mid M_H$, 这里 $N \in \mathfrak{Ind}(R[H])$ 和 $M \in \mathfrak{Ind}(R[G])$ 均有顶点 $D^* \in \mathcal{A}$. 必须证明 M 的同构类由这些条件所唯一确定. 据引理 (12.4.11), 只要证明: $M \mid N^G$ (注意: 这与以

下问题密切相关: 定理 (12.3.2) 里的条件 (b) 和 (c) 能否被同一个 $R[H]$ 模所满足?). 据定理 (12.3.2)(a), 存在 $U \in \mathfrak{Ind}(R[H])$, 其顶点在群 G 里与 D^* 相共轭, 且 $U \mid M_H$ 和 $M \mid U^G$. 据引理 (12.4.9) 和 (12.4.4) 有 $U \neq O(\mathcal{Y})$. 故由引理 (12.4.10) 得: $U \cong N$. 于是, $M \mid N^G$. 这证明了: g 是双射.

结论 (b) 可从引理 (12.4.10) 和 (12.4.11) 直接推出. 最后, 结论 (c) 可从定理 (12.3.2) (d) 得到. □

习 题

1. 证明引理 (12.4.9).

2. 设 D 是群 G 的一个循环 Sylow p 子群, 且 D 是 G 的平凡交集 (见 §5.4, 习题 6), 满足: $C_G(D) = D$. 设 $H = N_G(D)$.

(a) 证明: H 是以 D 为 Frobenius 核的 Frobenius 群.

(b) 设 (K, R, k) 是 p 模系统, 域 K 关于群 G 充分大, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想. 设 M 是非射影的不可分解 $R[G]$ 格, 其模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{M}$ 也不可分解. 证明: 存在非射影的不可分解 $R[H]$ 格 L 使得 $M \mid L^G$ 和 $\overline{L} \in \mathfrak{Ind}(k[H])$, 且存在满足条件 $M_H = L \oplus Q$ 的射影 $R[H]$ 模 Q.

提示 将定理 (12.4.5) 应用于 Green 对应的容许三元组 (G, H, D). 注意定理 (12.4.5) 里的双射 g 将非射影的不可分解 $R[G]$ 格 M 的同构类 $[M]$ 映到非射影的不可分解 $R[H]$ 格 L 的同构类 $[L]$. 此时有 $M \mid L^G$ 和 $M_H \cong L \oplus Q$, 这里 Q 是射影 $R[H]$ 模. 再将定理 (12.4.5) 应用于 $\overline{M} \in \mathfrak{Ind}(k[G])$. 注意 $\overline{M}$ 是非射影模.

3. 设 G, H, D 与 (K, R, k) 是习题 2 里所设定的群和 p 模系统. 设 P 是 K 特征标为 τ 的不可分解射影 $R[G]$ 格, N 是 P 的子 $R[G]$ 格使得 $M = P/N$ 是以 μ 为 K 特征标的 R 自由的 $R[G]$ 模, 且 $\overline{M} \in \mathfrak{Ind}(k[G])$. 定义

$$h(\mu) = \max_{\phi, \phi' \in \mathrm{Irr}(D)} \{|(\mu_D, \phi) - (\mu_D, \phi')|\}.$$

证明: $h(\mu) \leqslant 1$.

提示 按 M 是射影 $R[G]$ 模与非射影 $R[G]$ 模两种情形分别讨论. 当 M 是射影 $R[G]$ 模时, 证明: $h(\mu) = 0$. 当 M 是非射影 $R[G]$ 模时, 利用习题 2 的结果证明: 存在子 $R[H]$ 模直和分解 $M_H = L \oplus Q$ 和相应的特征标分解 $\mu_H = \lambda + \eta$, 其中 $L \in \mathfrak{Ind}(R[H])$, 而 Q 是射影 $R[G]$ 模. 再利用 §12.2, 习题 3 的结论.

参考文献

Albert A A. *Structure of Algebras* Amer, Math. Soc., New York, 1939.

Banaschewski B. *On the character ring of finite groups*, Canad. J. Math. **15**(1963), 605–612.

Berkovich Ya G, Zhmud' E M.

[1] *Characters of Finite Groups, Part 1*, Translations of Math. Monographs (AMS), vol. 172, USA, 1998.

[2] *Characters of Finite Groups, Part 2*, Translations of Math. Monographs (AMS), vol. 181, USA, 1999.

Berman S D.

[1] *On the theory of representations of finite groups*, Dokl. Akad. Nauk. **86**(1952), 885–888.

[2] *Characters of linear representations of finite groups over an arbitrary field*, Mat. Sb. **44**(1958), 409–456 (Russion).

[3] *Representations of finite groups*, Itogi Nauki i Tekhniki Sovremennye Problemy Matematiki, Algebra, Topolpgiya, Geometriya, VINITI, Moscow, 1964, pp. 83–122 (Russion).

Blau H I. *On block induction*, J. Algebra **104**(1986), 195–202.

Boerner H. *Darstellungen von Gruppen*, Springer, Berlin, 1955.

Bourbaki N.

[1] *Algèbre, Ch. 8: Modules et Anneaux Semi-simples*, Hermann, Paris, 1958.

[2] *Groupes et Algèbres de Lie, Ch. 4-6*, Hermann, Paris, 1968.

Brauer R.

[1] *Gruppen linearer Substitutionen, II*, Math. Z. **31**(1930), 733–747.

[2] *On the representations of groups of finite order*, Proc. Nat. Acad. Sci. **25** (1939), 290–295.

[3] *On sets of matrices over a division ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941),502–548.

[4] *Investigations on group characters*, Ann. Math.**42**(1941),936–958.

[5] *On the representation of a group of order g in the field of the g-th roots of unity*, Amer. J. Math. **67**(1945),461–471.

[6] *Applications of induced characters*, Amer. J. Math. **69**, (1947),709–716.

[7] *Representations of groups and rings*, Colloquium of the Amer. Math. Soc., Madison, Wisconsin, 1948 (mineo. lecture notes).

[8] *On the algebraic structure of group rings*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951), 237–251.

[9] *A characterization of the characters of groups of finite order*, Ann. of Math. **57**(1953), 357–377.

[10] *Number theoretical investigations on groups of finite order*, Proc. Int. Symp. Alg. No. Theory, Japan (1955), 55–62.

[11] *Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, I*, Math. Z. **63** (1956), 406–444.

[12] *Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, II,* Math. Z. **72**(1959), 25–46.

[13] *A note on theorems of Burnside and Blichfeldt*, Proc. Amer. Math. Soc. **15**(1964), 31–34.

Brauer R, Nesbitt C. *On the regular representations of algebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. **23**(1937),236–240.

Brauer R, Tate J. *On the characters of finite groups* , Ann. of Math. **62**(1955), 1–7.

Broué M, Puig L. *A frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56**(1980), 117–128.

Burnside W. *On an arithmetical theorem connected with roots of unity, and its*

application to group characteristics, Proc. London Math. Soc. **1(2)**(1904), 112–116.

Burry D. *A strengthened theory of vertices and sources*, J. Algebra **59** (1979), 330–344.

曹锡华, 叶家琛. 群表示论. 天元研究生数学丛书, 北京大学出版社, 北京, 1998.

Clifford A H. *Representations induced in an invariant subgroup*, Ann. of Math.**38** (1937), 533–550.

Conway J H, Curtis R T, Norton S P, Parker R A, Wilson R A.*Atlas of Finite Groups, Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

Curtis C W.

[1] *Irreducible representations of finite groups of Lie type*, J. Reine Agnew. Math.**219** (1965), 180–189.

[2] *Reprensentations of finite groups of Lie type*, Bull. Amer. Math. Soc.**1** (1979), 721–757.

Curtis C W, Fossum T V. *On centralizer rings and characters of representations of finite groups*, Math. Z. **107**, (1968), 402–406.

Curtis C W, Iwahori N, Kilmoyer R W. *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with BN-pairs*, Publ. Math. I.H.E.S. **40** (1971), 81–116.

Curtis C W, Reiner I.

[1] *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Pure and Appl. Math., vol. 11, Interscience, New York, 1962; 2nd ed., 1966.

[2] *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders*, I, Wiley-Interscience,1981; II, Wiley-Interscience, 1987.

Dade E C.

[1] *Character theory pertaining to finite simple groups*, Finite Simple Groups, Academic Press, London, 1971, pp. 249–327.

[2] *Counting characters in blocks, I*, Invent. Math. **109** (1992), 187–210.

[3] *Counting characters in blocks, II*, J. Reine Angew. Math. **448**(1994), 97–190.

Deskins E. *Finite abelian groups with isomorphic group algebras*, Duke Math. J. **23**(1956), 35–40.

Dornhoff L. *Group Representation Theory*, Part A, Dekker, New York, 1971; Part B, Dekker, New York, 1972.

Dress A W M. *Notes on the Theory of Representations of Finite Groups*, Bielefeld Notes, 1971.

Dress A W M. Küchler M. *Zur Darstellungstheorie Endlicher Gruppen, I*, Bielefeld Notes, 1970.

Fein B. *Minimal splitting fields for group representations*, Pacific J.Math. **51**(1974), 427–431.

Feit W.

[1] *On groups which contain Frobenius groups as subgroups*, Proc. Symp. Pure Math. vol. I (Finite Groups), Providence (1959), 22–27.

[2] *Characters of Finite Groups*, Benjamin, New York, 1967.

[3] *Some consequences of the classification of finite simple groups*, Proc. Symp. Pure Math. (AMS) **37** (1980), 175–181.

[4] *The Representation Theory of Finite Groups*, North–Holland, Amsterdam, 1982.

[5] *The computation of some Schur indices*, Israel J. Math. **46** (1983), 274–300.

Feit W, Thompson J. *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. **13** (1963), 775–1029.

Fong P.

[1] *Some properties of characters of finite solvable groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 116–117.

[2] *Solvable groups and modular representation theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 484–494.

[3] *A note on splitting fields of representations of finite groups, III*, J. Math. **7** (1963), 515–520.

Frame J S. *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47**(1941), 458–467.

Frobenius G.

[1] *Über Gruppencharaktere*, Sitzber Preuss. Akad. Wiss. (1896), 985–1021; *Gesammelte Abhandlungen, III*, Springer-Verlag, Berlin, 1968, 1–37.

[2] *Über Relationen zwischen den Characteren einer Gruppe und denen ihrer*

Untergruppen, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1898), 501–515.

[3] *Über die Charaktere der alternierenden Gruppe*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1901), 303–315.

[4] *Über auflösbare Gruppen, IV*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1901), 1216–1230.

[5] *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, II*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1907), 428–437.

Frobenius G, Schur I.

[1] *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1906), 186–208.

[2] *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1906), 209–217.

Gallagher P X.

[1] *Group characters and commutators*, Math. Z. **79** (1962), 122–126.

[2] *Determinants of representations of finite groups*, Hamb. Abh. **28** (1965), 162–167.

[3] *Zeros of characters of finite groups*, J. Algebra **4** (1966), 42–45.

Gaschütz W. *Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen*, Math. Z. **56** (1952), 376–387.

Gelfand I M, Šapiro Z Ya. *Representations of the group of rotations in three-dimensional space and their applications*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) (1952), 3–117; Amer. Math. Soc. Translations, vol 2, Series 2, Providence, 1956.

Goldschmidt D, Isaacs I. *Schur indices in finite groups*, J. Algebra **33** (1975), 191–199.

Gorenstein D. *Finite Groups*, Harper and Row, New York, 1968.

Green J A.

[1] *On the converse to a theorem of R. Brauer*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **51** (1955), 237–239.

[2] *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402–447.

Gustafson W H. *Burnside rings which are Gorenstein*, Comm. Algebra **5** (1977), 1–16.

Hall M. *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

Hall P. *On a theorem of Frobenius*, Proc. London Math. Soc. **40 (2)** (1936), 468–501.

Hall P, Higman G. *On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem*, Proc. London Math. Soc. **6(3)** (1956), 1–42.

Harada K. *A conjecture and a theorem on blocks of modular representation*, J. Algebra **70** (1981), 350–355.

Harris M, Knörr R. *Brauer correspondence for covering blocks of finite groups*, Comm. Algebra **13(5)** (1985), 1213–1218.

Hekster N S. *On finite groups all of whose irreducible complex characters are primitive*, Proc. A. **88(1)** (1985), 63–75.

Higman G. *Construction of simple groups from character tables*, Finite Simple Groups, Academic Press, London, 1971, pp. 205–214.

Higman D G.

[1] *Finite permutation groups of rank 3*, Math. Z. **86** (1964), 145–156.

[2] *Intersection matrices for finite permutation groups*, J. Algebra **6** (1967), 22–42.

Humphreys J E. *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Math. vol. 21 Springer-Verlag, New York, Inc. 1975 (1st edition); 1981 (3rd edition).

Huppert B.

[1] *Monomiale Darstellung endlicher Gruppen*, Nagoya Math. J. **6** (1953), 93–94.

[2] *Endliche Gruppen, I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

Huppert B, Blackburn N. *Finite Groups, II, III*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.

Isaacs I M.

[1] *Character degrees and derived length of a solvable group*, Canad. J. Math. **27** (1975), 146–151.

[2] *Character Theory of Finite Groups*, Dover, New York, 1994.

Ito N.

[1] *Some studies on group characters*, Nagoya Math. J. **2** (1951), 17–28.

[2] *On the degrees of irreducible representations of a finite group*, Nagoya

Math. J. **3**(1951), 5–6.

[3] *On the characters of soluble groups*, Nagoya Math. J. **3** (1951), 31–48.

Jacobson N. *Basic Algebra, II*, Freeman, San Francisco, 1980.

James G D. *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Math., vol. 682, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

James G D, Kerber A. *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Math. vol. 16, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

Jansen C, Lux K, Parker R, Wilson R. *An Atlas of Brauer Characters*, London Math. Soc. Monographs, New Series 11, Clarendon Press, Oxford, 1995.

Janusz G J.

[1] *Primitive idempotents in group algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **17**(1966), 520–523.

[2] *The Schur index and roots of unity*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 387–388.

[3] *Automorphisms of simple algebras and group algebras*, Proc. Philadelphia Conf. Dekker Lecture Notes **37** (1976), 381–388.

Juhász A, Tsushima Y. *A proof of Brauer's second main theorem and related results*, Hokkaido Math. J. **14** (1985), 33–37.

Keller G. *Concerning the degrees of irreducible characters*, Math. Z. **107** (1968), 221–224.

Kleppner A. *The structure of some induced representations*, Duke Math. J. **29** (1962), 555–572.

Kochendörffer R. *Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen*, Math. Nachrichten **1**(1948), 25–39.

Külshammer B. *The principal block idempotent*, Archiv der Math. **56** (1991), 313–319.

Losey G. *On group algebras of p-groups*, Michigan Math. J. **7**(1960), 237–240.

Mackey G W.

[1] *On induced representations of groups*, Amer. J. Math. **73** (1951), 576–592.

[2] *Symmetric and anti-symmetric Kronecker squares of induced representations of finite groups*, Amer. J. Math. **75** (1953), 387–405.

[3] *On multiplicity-free representations of finite groups*, Pacific J. Math. **8** (1958), 503–510.

Manz O, Wolf T. *Representations of Solvable Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 185, Cambridge Univ. Press, 1993.

Maschke H. *Über den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen*, Math. Ann. **50** (1898), 482–498.

Matsuda T. *On the unit groups of Burnside rings*, Japan J. Math. **8** (1982), 71–93.

Mckay J. *The non-abelian simple groups G, $|G| < 10^6$: character tables*, Comm. Algebra **7** (1979), 1407–1445.

Michler G O.

[1] *Blocks and centers of group algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 246, Springer-Verlag, 1972, pp. 429–563.

[2] *Trace and defect of a block idempotent*, J. Algebra **131** (1990), 496–501.

Murnaghan F. *The Theory of Group Representations*, Johns Hopkins, Baltimore, 1938.

Nagao H.

[1] *On the groups with the same table of characters as symmetric groups*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. vol. A8, 1957, pp. 1–8.

[2] *A remark on the orthogonality relations in the representation theory of finite groups*, Canad. J. Math. **11** (1959), 59–60.

Navarro G.

[1] *Two groups with isomorphic group algebras*, Archiv der Math. **55** (1990), 35–37.

[2] *Characters and Blocks of Finite Groups*, Lecture Note Series 250, London Math. Soc., Cambridge Univ. Press, 1998.

Navarro G, Willems W. *When is a p-block a q-block?*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1589–1591.

Nesbitt C. *Regular representations of algebras*, Ann. of Math. **39** (1938), 634–658.

Okuyama T. *On blocks and subgroups*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 555–563.

Osima M.

[1] *On the induced characters of a group*, Proc. Japan Acad. **28** (1952), 243–248.

[2] *On the induced characters of groups of finite order*, Math. J. Okayama

Univ. **3** (1953), 47–64.

[3] *On some properties of group characters, I*, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 18–21.

[4] *On some properties of group characters, II*, Math. J. Okayama Univ.**10** (1960), 61–66.

Oyama T. *On the groups with the same table of characters as alternating groups*, Osaka J. Math. **1** (1964), 91–101.

Parks A E. *A group-theoretic characterization of M-groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **94(2)** (1985), 209–212.

Price D. *A generalization of M-groups*, Ph. D. thesis, Univ. of Chicago, 1971.

Puttaswamaiah B M, Dixon J. *Modular Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1977.

Rayna G. *On the classification of modules over finite groups*, Ph. D. thesis, Princeton Univ., 1965.

Reiner I .

[1] *The Schur index in the theory of group representations*, Michigan Math. J. **8** (1961), 39–47.

[2] *An introduction to the representation theory of Artin algebras*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 209–233.

Reynolds W F. *Blocks and normal subgroups of finite groups*, Nagoya Math. J. **22** (1963), 15–32.

Robinson G de B. *Representation Theory of the Symmetric Group*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1960.

Robinson G R. *The number of blocks with a given defect group*, J. Algebra **84** (1983), 493–502.

Schilling O F G. *Über die Darstellungen endlicher Gruppen*, J. für Math. **174** (1936), 188.

Schur I.

[1] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **127** (1904), 20–50.

[2] *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (1905), 406–432.

[3] *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebroch-*

ene lineare Substitutionen, J. für Math. **132** (1907), 85–137.

[4] *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. für Math. **139** (1911), 155–250.

Scott W M. *Matrix algebras over an algebraically closed field*, Ann. of Math. **43** (1942), 534–553.

Serre J.-P .

[1] *Conducteurs d'Artin des caractères reéls*, Invent. Math. **14** (1971), 173–183.

[2] *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, New York, 1977. 中译本《有限群的线性表示》, 郝炳新译, 科学出版社, 1984.

Shiratani K. *On the characters and character rings of finite groups*, Mem. Kyusyu Univ. Ser. A **11(2)** (1957), 99–115.

Shoda K. *Über die monomialen Darstellungen einer endlichen Gruppe*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **15(3)** (1933), 249–257.

Siebeneicher C. *λ-Ringstrukturen auf dem Burnsidering der Permutations darstellungen einer endlichen Gruppe*, Math. Z. **146** (1976), 223–238.

Solomon L.

[1] *The Schur index*, Ph. D. thesis, Harvard Univ., 1958.

[2] *The representation of finite groups in algebraic number fields*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 144–164.

[3] *On Schur's index and the solutions of* $G^n = 1$ *in a finite group*, Math. Z. **78** (1962), 97–115.

[4] *Rational characters and permutation characters*, Symp. Math. Inst. Nazionale Alta. Mat. (Rome), **13** (1974), 453–466.

Suzuki M.

[1] *Applications of group characters*, Proc. Symp. Pure Math. vol. I (Finite Groups), Providence, 1959, pp. 88–99.

[2] *Applications of group characters*, Report, Summer Inst. Finite Groups, Pasadena, 1960, pp. 256–263.

Swan R G. *The Grothendieck ring of a finite group*, Topology **2**(1963), 85–110.

Takahashi S. *Arithmetic of group representations*, Tôhoku Math. J. (2nd series) **11**(1959), 216–246.

Tucker P. *Endomorphism ring of an induced module*, Michigan Math. J. **12** (1965), 197–202.

van der Waerden B L.

[1] *Algebra, II*, 4th ed., Springer, Berlin, 1959.

[2] *Algebra, I*, 6th ed., Springer, Berlin, 1964.

Veitsblit A I. *On zeros of irreducible complex characters of finite groups*, Manuscript No. 3767–78, deposited at VINITI, 1978 (Russion).

Walter J H. *Note on the radical of a group algebra*, Proc. Camb. Phil. Soc. **54** (1957), 128–130.

Ward H N. *The analysis of representations induced from a normal subgroup*, Michigan Math. J. **15** (1968), 417–428.

Washington L. *Introduction to Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Math. vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1982.

Wedderburn J H M. *Lecture on Matrices*, Amer. Math. Soc., New York, 1934.

Weyl H. *The Classical Groups*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

Wielandt H. *Finite Permutation Groups*, Academic Press, New York, 1964.

Willems W. *A note on Brauer's induction theorem*, J. Algebra **58** (1979), 523–526.

Yoshida T. *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, J. Algebra **80**(1983), 90–105.

Zassenhaus H. *The Theory of Groups*, Chelsea, New York, 1949.

汉英对照术语索引

三　画

四　画

五 画

六 画

七 画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 六 画

英文字母开头的术语

符　　号

1_A	(群或代数) A 的单位表示(或单位特征标)
$\mathbf{1}_G$	群 G 的单位元
1_V	向量空间 V 上的恒等变换
$1_{G_{p'}}$	Brauer 主特征标
${}_AA$	正则左 A 模
A_D	Young 表 D 的列置换群元素的交错和
A^e	代数 A 的包络代数
$A(M)$	正则 A 模的 M 齐次分支
A_n	n 次交代群
A^{op}	与代数 A 反同构的代数
$\mathrm{Aut}(A)$	(群、环或代数) A 的自同构群
A_V	代数表示 $A \longrightarrow \mathrm{End}\,V$ 的像
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$	由元素 $a_1, \ldots, a_n$ 生成的群
$\{a_1, \ldots, a_n\}$	由元素 $a_1, \ldots, a_n$ 构成的集合
$a \mid b$ (或$a \nmid b$)	整数 a 整除(或不整除) b
$\mathscr{A}\mathscr{B}$	阿贝尔群范畴
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(D, H)$	群 G 的子群族 $\{D^* \leqslant D \mid D^* \nleqslant_G \mathcal{X}\}$
$B_0(G)$	群 G 的主 p 块
$B(-,-)$	Hecke 代数上的双线性型
$\mathrm{Bch}(G)$	由群 G 的 Brauer 特征标生成的加法群
b^G	子群的块 b 到 G 的诱导块

$\mathrm{Bl}(G)$ 群 G 的 p 块集合

c Cartan 同态 $K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$

$\mathbf{C}$ 群 G 在域 k 上的 Cartan 矩阵 $(\mathbf{C}_{ST})_{S,T\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)}$

$\mathbb{C}$ 复数域

$\mathbf{C}_{ST}$ 单 $k[G]$ 模 S 作为单 $k[G]$ 模 T 的射影包 P_T 的合成因子的重数

$C(D)$ Young 表 D 的列置换群

$\mathrm{cf}_K(G)$ (或$\mathrm{cf}(G)$) 群 G 上 K 值类函数空间 (环)

$\mathrm{cf}_K(G;G_{p'})$ 群 G 上的在$G\setminus G_{p'}$ 上取零值的 K 值类函数空间 (环)

$\mathrm{cf}_K(G_{p'})$ 集合 $G_{p'}$ 上 K值类函数空间 (环)

$\mathbb{C}^G$ 群 G 上复值函数空间(环)

$C_G(x)$ (或$C(x)$) (元素或集合) x 在群 G 里的中心化子

$\mathrm{char}.F$ 域 F 的特征数

$\mathrm{ch}_F^+(G)$ (或$\mathrm{ch}^+(G)$) 群 G 的 F 特征标集合

$\mathrm{ch}_{\mathcal{F}}(G)$ 由群 G 的 $H\in\mathcal{F}$ 诱导表示的整线性组合构成的集合 ($\mathcal{F}$ 是 G 的一个子群集合)

$\mathrm{Cl}(G)$ 群 G 的共轭类集合

$\mathrm{Cl}_H(x)$ 含 x 的 H共轭类

$\mathrm{Cl}(G_{p'})$ 群 G 的属于 $G_{p'}$ 的共轭类集合

$\mathrm{Cl}(g)$ 含元素 g 的共轭类

$\mathbb{CL}(n)$ 由 $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n,-1\}$ 生成的 Clifford 群

$\mathrm{Coker}(\alpha)$ 映射 $\alpha: A\longrightarrow B$ 的余核 $B/\alpha(A)$

d 分解同态 $G_0(K[G]) \longrightarrow G_0(k[G])$

$\mathbf{D}$ 群 G 的分解矩阵 $(\mathbf{D}_{ME})_{M\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G),E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)}$

$\mathbf{D}_0$ 群 G 关于素数 p 的分解矩阵 $(d_{\chi\phi})_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(G),\phi\in\mathrm{IBr}(G)}$

$d(B)$ 块 B 的亏数

deg 次数

det 行列式

$\det\chi$ 群 G 的线性特征标 $g\mapsto\det\rho(g)$ (ρ 是 G 的以 χ 为特征标的表示)

$\mathrm{diag}(\ldots)$ 对角矩阵

$\dim_F$ (或dim) 维数, 下标指明基域

$\mathbf{D}_{ME}$ $M\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)$ 作为 $E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G)$ 的 G 稳定 R 格 E_1 的模 m 约化 $\overline{E_1}$ 的合成因子的重数

D_n 阶数为 $2n$ 的二面体群

D_α 型 α 的 Young 表

$d_{\chi\phi}$ 群 G 关于素数 p 的分解数 ($\chi\in\mathrm{Irr}_K(G)$, $\phi\in\mathrm{IBr}(G)$)

$d^z_{\chi\phi}$ 广义分解数 ($z \in G_p$, $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, $\phi \in \mathrm{IBr}(C_G(z))$)

e 分裂单同态 $K_0(k[G]) \longrightarrow G_0(K[G])$

$\mathbf{E}$ 分裂单同态 e 的矩阵 $(\mathbf{E}_{EM})_{E\in\overline{\mathrm{Irr}}_K(G), M\in\overline{\mathrm{Irr}}_k(G)}$

$\mathbf{E}_{EM}$ E 作为 $K \otimes_R \tau_m^{-1}(P_M)$ 的合成因子的重数 ($\tau_m : K_0(R[G]) \longrightarrow K_0(k[G])$是典范同构)

e_B $Z(k[G])$ 里对应于块 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的非零幂等元 $\overline{f_B}$

E/F F 的扩域 E

e_G 由单一元组成的 G 集

End_F (或 End) F 线性变换集合

F 域

f_B $Z(R[G])$ 里的 Osima 幂等元

F_D 元素 $A_DS_D \in Z(F[S_n])$ (D 是 Young 表)

$F[G]$ 群 G 在域 F 上的群代数

$\mathcal{F}(G, F)$ 群 G 上 F 值函数的集合

$\mathbb{F}_p$ (或 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(p)$) 含有 p (p 是素数) 个元素的域, 也是 $\mathbb{Z}$ 的模 p 剩余类环

$F[S]$ (或 $F[x_1, \ldots, x_n]$) 由集合 S (或 $\{x_1, \ldots, x_n\}$) 在域 F 上生成的环

$F(S)$ (或 $F(x_1, \ldots, x_n)$) 由集合 S (或 $\{x_1, \ldots, x_n\}$) 在域 F 上生成的域

$F(\chi)$ $\{\chi(g) \mid g \in G\}$ 在域 F 上生成的域 (χ 是群 G 的特征标)

G 有限群

G' (或 $G^{(1)}$) 群 G 的导群

$\hat{G}$ 阿贝尔群 G 的不可约复表示群

$G_0(L[G])$ $L[G]$ 模范畴的 Grothendieck 群(环)

$G_0^+(L[G])$ $\{[E] \in G_0(L[G]) \mid E$ 为有限生成 $L[G]$ 模$\}$

$\mathrm{Gal}\, E/F$ 域 E 在子域 F 上的伽罗华群

$[G : H]$ 子群 H 在群 G 中的指数 $\dfrac{|G|}{|H|}$

(G, H, D) Green 对应的容许三元组

$G^{(i)}$ 群 G 的第 i 阶导群

$\mathrm{GL}_n(F)$ 域 F 上 n 阶一般线性群(或可逆矩阵群)

G_p 群 G 的 p 元素集合

$G_{p'}$ 群 G 的 p' 元素集合

g_p 1) 群元素 g 的 p 部分
2) 整数 g 的 p 部分

$g_{p'}$ 1) 群元素 g 的 p' 部分
2) 整数 g 的 p' 部分

$\mathrm{GL}(V)$　向量空间 V 的线性自同构群

Hom_F (或 Hom)　同态集合, 下标指明所在范畴

${}^gH$　集合 gHg^{-1}

H^g　集合 $g^{-1}Hg$

${}^gh$　元素 ghg^{-1}

h^g　元素 $g^{-1}hg$

$\mathcal{H}(G,H,\psi)$ (或 $\mathcal{H}$)　对应于群 $H\leqslant G$ 与 $\psi\in \mathrm{ch}_F(H)^+$ 的Hecke 代数

$(I:A)$　集合 $\{a\in A \mid aA\subset I\}$ (I 是代数 A 的理想)

$\mathrm{IBr}(G)$　群 G 的不可约Brauer 特征标集合

$\mathrm{Im}(\alpha)$　(群、环、线性空间或代数的) 同态 α 的像

Ind_H^G (或 $-_H^G$, $-^G$)　诱导函子, 上下标指明所涉及的范畴

$\mathrm{ind}_H(x)$　群的元素 x 关于子群 H 的指数 $[H: {}^xH\bigcap H]$

$\mathfrak{Ind}(R[G])$　不可分解 $R[G]$ 模同构类的代表系

$\overline{\mathfrak{Ind}}_{\mathcal{A}}(R[G])$　顶点属于子群族 $\mathcal{A}$ 的不可分解 $R[G]$ 格的同构类集合

$\mathrm{Inv}_G(S)$　G 集 (或 G 模, G 表示空间) S 上的 G 固定点集合

$\mathrm{Inv}_G\tau$ (或 $\mathrm{Inv}\,\tau$)　在 $\tau(G)$ 的作用下的不动点全体

$\overline{\mathrm{Irr}}\,A$　不可约 A 模同构类的代表系

$\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ (或 $\overline{\mathrm{Irr}}\,G$)　群 G 的不可约 F表示等价类的代表系

$\mathrm{Irr}_F G$ (或 $\mathrm{Irr}\,G$)　群 G 的不可约F特征标集合

$\mathrm{Ker}\,(\alpha)$ (或 $\ker(\alpha)$)　1) (群、环、线性空间或代数的) 同态 α 的核
2) 特征标 α 的核

$\mathrm{Ker}\,(B)$　块 B 的核 $\bigcap_{\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)\bigcap B}\mathrm{Ker}\,(\chi)$

(K, R, k)　p 模系统

$K_0(L[G])$　射影 $L[G]$ 模范畴的 Grothendieck 群 (环)

$K_0^+(L[G])$　$\{[E]\in G_0(L[G]) \mid E$ 为有限生成射影 $L[G]$ 模$\}$

$l(\rho,\tau)$ (或 $l(V,W)$)　F 代数 A 的表示 (ρ,V) 和 (τ,W) 的交结数 $\dim_F(\mathrm{Hom}_A(V,W))$

$[M]$　$L[G]$模 (或射影 $L[G]$模) M 在 $G_0(L[G])$ (或 $K_0(L[G])$) 里的像

${}_AM$　左 A 模 M

M_A　右 A 模 M

${}_AM_B$　(A,B) 双模 M

${}_A\mathscr{M}$　左 A 模范畴

$\mathscr{M}_A$　右 A 模范畴

$\mathscr{M}(A)$　不可约 A 模同构类的代表系

$m_F(\chi)$　特征标 χ 在域 F 上的 Schur 指标

$M \mid N$ 模 M 等于 (或同构于) 模 N 的直和项

$M^{(n)}$ n 个 M 的直和

$M_n(F)$ 域 F 上 n 阶矩阵代数

$M = O(\mathcal{Z})$ M 是 $(G, \mathcal{Z})$ 射影的 $R[G]$ 格, $\mathcal{Z}$ 是群 G 的子群族

$M = L \oplus O(\mathcal{Z})$ M 有 $R[G]$ 格分解 $M = L \oplus N$ 使得 $N = O(\mathcal{Z})$

$\mathbb{N}$ 非负整数集

$N_K(H)$ H 在 K 中的正规化子

$n_M(V)$ 模 V 的 M 齐次分支中不可约分量 M 的重数

$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ 范畴 $\mathcal{C}$ 的对象

$o(g)$ 元素 g 的阶数

$\mathbf{O}_p(G)$ 群 G 的极大正规 p子群

$\mathbf{O}_{p'}(G)$ 群 G 的极大正规 p'子群

$\mathcal{P}(A)$ 射影 A 模范畴

$\mathrm{PGL}(V)$ 向量空间 V 上的射影线性群

P_E $k[G]$ 模 (或 $R[G]$ 模) E 的射影包

$p(n)$ n 的划分个数

$\mathbb{Q}$ 有理数域

Q_m 阶数为 $4m$ 的广义四元数群

$\mathrm{Rad.}(A)$ 代数 (或环) A 的 Jacobson 根基

$\mathbb{R}$ 实数域

$R(D)$ Young 表 D 的行置换群

Res_H^G (或 $-_H$) 纯量限制函子, 上下标指明所涉及的范畴

$R_F(G)$ (或 $R(G)$) 群 G 的 F 表示环

$R_F(G)^+$ (或 $R(G)^+$) $R_F(G)$ 中的实在表示集合

S_D Young 表 D 的行置换群的元素之和

sg 对称群的符号表示

$\mathrm{SL}_n(F)$ 域 F 上 n 阶特殊线性群 (即系数属于 F 且行列式为 1 的所有 n 阶方阵组成的乘法群)

S_n n 次对称群

$\mathrm{Stab}_G(w)$ 元素 (或集合) w 在群 G 中的稳定子

$\mathrm{supp}(x)$ 集合 $\{g \in G \mid a_g \neq 0\}$ $(x = \sum_{g \in G} a_g g \in R[G])$

$S(z)$ $z \in G_p$ 的 p 截面 $\{u \in G \mid u_p \sim_G z\}$

$T_G(\rho)$ (或 $T(\rho)$) 子群表示 ρ 在群 G 中的惯性群

$\mathrm{tr}.X$ (或 $\mathrm{Tr}.X$) 线性变换 X 的迹

$V(M)$ 模 V 的 M 齐次分支

$\mathcal{V}(M)$　使得 M 是 (G,H) 射影的所有子群 $H \leqslant G$ 的集合 (M 是 $R[G]$ 模)
$\mathrm{vtx}(M)$　$R[G]$ 模 M 的所有顶点组成的集合
$|X|$　集合 X 的基数
x_l　以元素 x 作左乘的算子
$[x,y]$　换位子 $x^{-1}y^{-1}xy$
$X \setminus Y$(或 $X-Y$)　差集 $\{x \in X \mid x \notin Y\}$
$\mathcal{X}=\mathcal{X}(D,H)$　群 G 的子群族 $\{{}^xD \bigcap D \mid x \in G \setminus H\}(H,D \leqslant G)$
$\mathcal{Y}=\mathcal{Y}(D,H)$　群 G 的子群族 $\{{}^xD \bigcap H \mid x \in G \setminus H\}(H,D \leqslant G)$
$\mathbb{Z}$　整数环
$Z(A)$　(代数或群) A 的中心
(z,b)　与块 b^G 相关联的子截面 ($z \in G$ 是 p 元, $b \in \mathrm{Bl}(C_G(z))$)
$Z(\chi)$　集合 $\{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(\mathbf{1})\}$ (χ 是群 G 的特征标)
β_P　由 p 群 P 所确定的 Brauer 同态 $Z(k[G]) \longrightarrow Z(k[N_G(P)])$
δ_{ij}　克罗内克符号
$\delta_G(\mathcal{H})$ (或 $\delta(\mathcal{H})$)　群 G 的共轭类 $\mathcal{H}$ 的 p 亏群集合
$\delta_G(B)$ (或 $\delta(B)$)　群 G 的块 B 的 p 亏群集合
$\widetilde{\theta}$　1) $\mathrm{cf}_K(G;G_{p'})$ 中对应于 θ 的函数 ($\theta \in \mathrm{ch}_K(G) \bigcup \mathrm{Bch}(G)$)
　2) $\mu_K(G)$ 中满足 $\overline{\widetilde{\theta}} = \theta$ 的单位根 ($\theta \in \mu_k(G)$)
$\Lambda^{(m)}$　m 次单位根在 $\mathbb{Q}$ 上的分圆域
Λ_n　n 的划分的集合
λ_B　由块 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 确定的 k代数同态 $Z(k[G]) \longrightarrow k$
$\dot{\lambda}$　G 的子群 H 上函数 λ 在 G 上的零扩充
$\overline{\lambda}$　1) 与函数 λ 的值互为复共轭的复值函数
　2) $\lambda \in \mathbb{C}$ 的复共轭
　3) $\lambda \in R$ 的模 m 约化
$\mu(-)$　Möbius 函数
$\mu_K(G)$　域 K 里 m' 次单位根组成的乘法群 (m' 是 $G_{p'}$ 里元素阶数的最小公倍数)
$\mu_k(G)$　域 k 里 m' 次单位根组成的乘法群 (m' 是 $G_{p'}$ 里元素阶数的最小公倍数)
ν_p　关于素数 p 的赋值函数 $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \bigcup \{\infty\}$
(ρ,V)　以 V 为表示空间的表示ρ
$\rho' \leqslant \rho$　表示 (或特征标) ρ' 中每个不可约分支的重数不大于在 ρ 中相应分支的重数
$\rho_1 \# \rho_2$　由直积因子的表示 ρ_1 与 ρ_2 所构造的一种群表示

ρ_B	1) 由表示 ρ 决定的关于基 B 的矩阵表示 (B 是 ρ 的表示空间的一组基) 2) 群的表示 (或函数) ρ 在子群 B 上的限制表示 (或限制函数) 3) $\rho \in \mathrm{cf}_K(G)$ 对应于块 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ 的部分 $\sum_{\chi\in B\bigcap \mathrm{Irr}_K(G)}(\rho,\chi)\chi$
$({}^g\rho, {}^gV)$	(ρ, V) 的由元素 g 所决定的共轭表示
ρ_{reg}	正则表示
ρ^σ	F 表示 (或 F 值函数) ρ 在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$ 的作用下的像
Φ_ϕ	群 G 上的 K 值特征标 $\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}_K(G)} d_{\chi\phi}\chi$ ($\phi \in \mathrm{IBr}(G)$)
Φ_M	射影 $R[G]$ 模 $\tilde{M}$ 的特征标 (射影 $k[G]$ 模 M 是 $\tilde{M}$ 的模 m 约化)
ϕ_E	群 G 的 k 表示 E 的 Brauer 特征标
$(\phi,\psi)_{p'}$	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\sum_{x\in G_{p'}} \phi(x)\psi(x^{-1})$ ($\phi,\psi \in \mathrm{cf}_K(G)\bigcup \mathrm{cf}_K(G_{p'})$)
$\varphi(-)$	欧拉函数
χ_{ik}	特征标 χ_i 在共轭类 $\mathscr{C}_k$ 上的值
χ_{reg}	正则特征标
χ_ρ	表示 ρ 的特征标
$\chi^{(z,b)}$	群 G 上对应于子截面 (z,b) 的函数
$\Omega(G)$	群 G 的 Burnside 环
ω_χ	1) 由群 G 的 F 特征标 χ 所决定的从 $Z(F[G])$ 到 $\mathbb{C}$ 内的代数同态 2) 由群 G 的特征 p 域 k 上特征标 χ 所决定的从 $Z(k[G])$ 到特征零域 K 内的代数同态
$\prod$	连乘号
$\sum$	连加号
$(-,-)_G$ (或 $(-,-)$)	1) $\mathbb{C}^G$ 上的正定Hermitian 内积 2) $R_{\mathbb{C}}(G)$ 内的对称双线性型
$\langle -,-\rangle_K$	对称双线性型 $G_0(K[G]) \times G_0(K[G]) \longrightarrow \mathbb{Z}$
$\langle -,-\rangle_k$	双线性型 $K_0(k[G]) \times G_0(k[G]) \longrightarrow \mathbb{Z}$
$\cong$	同构关系
$\sim$	等价关系
$\sim_G$ (G 是群)	(元素之间的) G 共轭关系
$\sim_F$ (F 是域)	(元素之间的) F 共轭关系
$=_G$ (G 是群)	(集合之间的) G 共轭关系
$\leqslant_G$ (G 是群)	1) (集合之间的) G 子共轭关系, 如 $X \leqslant_G Y$ 2) (子群与子群族之间的) G 子共轭关系, 如 $D \leqslant_G \mathcal{A}$
$\longleftrightarrow$	1-1 对应关系
$\Longleftrightarrow$	当且仅当

$\Longrightarrow$	逻辑蕴涵
$\longrightarrow$	映射
$\mapsto$	在一个映射下元素的对应关系
$\hookrightarrow$	内射
$\subseteq$	集合之间的含于 (可能相等) 关系
$\subset$	集合之间的严格含于关系
$\in$	(元素) 属于 (集合)
$\bigcup$	并集
$\dot{\bigcup}$	无交并集
$\times$	群的直积, 或集合的笛卡尔积
$\rtimes$	群的半直积, 开口对着正规子群
$\triangleleft$	为某群的正规子群
$\oplus$	直和
$\otimes$	张量积, 下标指明基环
$\forall$	对于所有
$:=$	定义为
$_^*$	1) 对偶空间, 反轭模, 反轭表示 2) 域的非零元素乘法群
$_^E$	表示或空间的基域扩充, 这里 E 为基域的扩域
$\square$	证毕
$\varnothing$	空集

现代数学基础　图书清单

注: 书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩 编著
23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
24465-6	矩阵论	詹兴致
24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行、严绍宗、舒五昌、童裕孙 编著
25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
27261-1	整体微分几何初步(第三版)	沈一兵 编著
26360-2	数论 (第一卷) —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黑川信重、斎藤毅著, 胥鸣伟、印林生 译
26361-9	数论 (第二卷) —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黑川信重、栗原将人、斎藤毅著, 印林生、胥鸣伟 译
26547-7	微分方程与数学物理问题	[瑞典] 纳伊尔 · 伊布拉基莫夫 著
27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册 · 第二版修订本)	夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌 编著
27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册 · 第二版修订本)	夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌 编著

郑重声明

购书请拨打电话：(010)58581118

策划编辑　王丽萍

责任编辑　崔梅萍

封面设计　张　楠

版式设计　余　杨

责任校对　姜国萍

责任印制　陈伟光